UNTERSUCHUNGEN

UEBER DEN

LICHTWECHSEL DES STERNES β PERSEI.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

JOHANNES HARTING.

MÜNCHEN
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1889.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547425_0007

UNTERSUCHUNGEN

UEBER DEN

LICHTWECHSEL DES STERNES β PERSEI.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

JOHANNES HARTING.

MÜNCHEN
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1889.

EINLEITUNG.

Der Lichtwechsel des Sternes β Persei ($A.\,R. = 3^h\ 0^m\ 22^s$, *Decl.* $= +40^0\ 29',5$) ist seit den genaueren Beobachtungen Goodrike's vom Jahre 1782 ein Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen geworden, die in der neuesten Zeit besonders von Zöllner, Bruns und Pickering ausgeführt worden sind.

Man hat zur Erklärung jenes Phänomens hauptsächlich zwei Theorieen herangezogen. Die eine ist von Zöllner in seinen „Photometrischen Untersuchungen" aufgestellt und durchgeführt worden; nach ihr verursachen grosse Schlackenfelder auf der Oberfläche des Sternes eine Veränderung des Lichtes. Die andere findet sich in der Abhandlung des amerikanischen Astronomen Pickering: „Dimensions of the fixed stars, with especial reference to binaries and variables of the Algol type". Es wird angenommen, dass sich ein dunkler Körper um den Stern bewegt, der beim Vorübergange uns einen Teil der leuchtenden Fläche verdeckt und so eine Abnahme und Zunahme des Lichtes herbeiführt. Pickering hat nun auch diese Theorie mathematisch durchzuführen gesucht; gegen die Art und Weise, in welcher dies geschieht, lassen sich jedoch einige Bedenken erheben.

Ich werde nun in den ersten 4 Paragraphen der vorliegenden Abhandlung einiges, was die Zöllner'sche Fleckentheorie betrifft, auseinandersetzen, während ich in den weiteren Paragraphen ausführlich die Trabantentheorie von Pickering durchführen werde.

§ 1.

Wie oben erwähnt, finden sich die Grundlagen der Zöllner'schen Theorie in seinen „Photometrischen Untersuchungen“ IV § 71—80. Eine kurze Zusammenfassung derselben ist von Plassmann gegeben in einem neuerdings erschienenen Werke „Die veränderlichen Sterne“ pag. 66, worauf ich hier verweise.

Dort sowohl, wie in der „populären Astronomie“ von Newcomb-Engelmann findet sich die Behauptung, dass die Fleckentheorie schon vor 2 Jahrhunderten und zwar von dem französischen Astronomen Boulliau aufgestellt sei.

Da jedoch diese Behauptung nicht weiter begründet ist, gestatte ich mir, auf die Frage der Autorschaft dieser Hypothese näher einzugehen. Die betreffende Stelle, auf die sich Newcomb stützt — Plassmann hat augenscheinlich seine Angabe Newcomb's Werk entnommen — findet sich in der Abhandlung des erwähnten Astronomen:

Ismaelis Bullialdi ad Astronomos monita duo:

primum, De stella Nova, quae in Collo Ceti ante annos aliquot visa est

alterum, De Nebulosa in Andromedae cinguli parte Borea ante biennium iterum orta (erschienen zu Paris 1667).

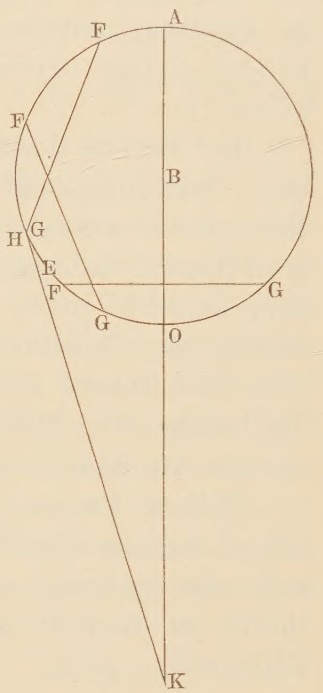
Boulliau stellt zunächst pag. 5—8 die Beobachtungen des Sternes *o* (mira) ceti aus den Jahren 1638—1666 zusammen und leitet die recht gut übereinstimmende Periode von 333 Tagen ab. Darauf behandelt er die verschiedenen Ursachen, welche der Variabilität dieses Sternes zu Grunde liegen können.

„Causas vero mutationum, quae successive in incrementis et decrementis huius stellae observantur, investigare ac invenire arduum est ac operosissimum. Omnis namque Lucidi apparens augmentum et imminutio; vel ex immutata ipsius à vidente distantia, vel ex vario ad eum situ ac dispositione, quae angulus visionis variat, aut tandem ex ipsius Lucidi mole aucta vel diminuta oritur“.

Weiter hin zeigt er, dass man sich den Lichtwechsel nicht als eine locale Bewegung des Sternes auf irgend einer Curve erklären könne, und fährt dann fort:

„Exclusis motibus localibus, ac ignium statis temporibus accensorum, rursusque extinctorum suppositione nulla alia occurrit causa ortus et occasus stellae vicibus alternis quam haecce; Quod scilicet molis globosae illius stellae pars una hemisphaerio minor sit lucida, altera hemisphaerio major sit obscura; ac stellae corpus circa proprium centrum ac circa unum axem revolvatur atque convertatur, in quem ducta a terra linea rectos cum eo angulos faciat; Quomodo ergo id fiat, demonstremus."

Die folgende Deduction, mit der Boulliau seine Ansicht zu beweisen sucht, gebe ich in möglichst wortgetreuer Uebersetzung wieder.



„Es sei AHO die Sternkugel (im Durchschnitt), welche (wie hier gezeichnet) einem Stern erster Grösse gleich sein mag, dessen Durchmesser nach Hevel ungefähr $0'' 6'''.3$ beträgt. Nun sei FG eine Sehne eines grössten Kreises der Sternkugel und gleich dem Durchmesser der Sterne zweiter Grösse, nach demselben Astronomen $0'' 4'''.32$, — wenn nicht überhaupt das Verhältnis des Durchmesser der Kugel zu der Sehne FG grösser ist, welche ja der Durchmesser des leuchtenden Teiles ist, was mir der Wahrheit näher zu kommen scheint —, so wird FG der Durchmesser eines auf der Kugeloberfläche beschriebenen Kreises sein, der den leuchtenden Teil begrenzt. Nun drehe sich die Kugel AHO um den Mittelpunkt B und die Axe AO. In K befinde die Erde, von wo aus man die Tangente KH ziehen möge, welche die Sternkugel in H berührt. Wenn sich nun die Kugel in der Richtung AHO dreht und die Begrenzung des leuchtenden Teiles beim Punkte G den Punkt H erreicht, so beginnt dieser Teil sichtbar zu werden und der Erde zu erscheinen; er kann aber wegen seiner geringen Grösse noch nicht wahrgenommen werden. Schreitet bei weiterer Rotation der Durchmesser des leuchtenden Teiles gegen E fort, so werden allmählich immer mehr neue Teile sichtbar, und FG rückt selbst aus der schiefen in die zur Erde senkrechte

Stellung, so dass die Basis des Visionswinkels und damit auch das Licht des Sternes wächst, bis der Mittelpunkt des leuchtenden Teiles nach O kommt. Die nach diesem Punkte von der Erde K gezogene Grade KC bildet mit dem Durchmesser FG die rechten Winkel KCF und KCG. Desshalb erscheint in dieser Stellung der Stern am hellsten, da ihn ja das Auge dann unter dem grössten Winkel erblickt. Da nun aber bei der unendlich grossen Entfernung der Erde von den Fixsternen der Durchmesser eines Sternes zu klein ist, um wahrgenommen werden zu können, und auch das Verhältnis der Durchmesser der Sterne erster und zweiter Grösse nicht sicher genug bestimmt ist, so wäre die Rechnung zu unsicher, mittelst deren man die einzelnen Phasen und die zugehörigen Zeiten berechnen könnte, wesshalb wir dies hier übergehen wollen."

Der Schluss der Abhandlung ist für uns hier ohne weiteres Interesse. Diese Darlegung zeigt nun aber, dass die Ansichten Boulliau's über die Natur des Lichtwechsels zu unklare sind, als dass man ihnen den Namen einer Theorie beilegen könnte. Mit dem Worte: Fleck oder Trabant ist noch keine Theorie gegeben. Zu dieser gehört eine ausführliche Verfolgung der Einzelheiten des Verlaufes des Lichtwechsels; insbesondere muss jede Theorie die Thatsache erklären können, dass das Anwachsen des Lichtes vom Minimum zum Maximum stets schneller vor sich geht, wie die Abnahme vom Maximum zum Minimum.

Zöllner war es, der dies aus dem Vorhandensein von Schlackenfeldern auf der Oberfläche des Sternes, wie bekannt, ableitete; und desshalb, wie überhaupt wegen seiner eingehenderen Begründung der Fleckentheorie ist es nicht mehr als billig, wenn man dieser den Namen der Zöllnerschen giebt.

§ 2.

Herr Bruns hat in einer Abhandlung: „Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus" vermittelst einer sehr eleganten Methode gezeigt, dass man durch Annahme einer Fleckenverteilung auf

1) Auszug aus dem Monatsbericht der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung vom 13. Januar 1881.

dem Stern stets und zwar auf unendliche viele Weisen die beobachtete Lichtcurve darstellen könne. Man kann jedoch auf eine ganz andere Art zu einer Entwicklung gelangen, welche den Zusammenhang zwischen den beobachteten Helligkeiten und der Gestalt der die Lichtänderung hervorrufenden Flecke ergiebt. Hierzu führt uns folgende Betrachtung. Wir nehmen den Stern als eine Kugel an, deren Rotationsaxe eine beliebige Neigung ε gegen den verticalen, auf dem Visionsradius senkrecht stehenden Durchmesser derselben haben mag.

Nach der Zöllner'schen Theorie ist dann die Periode des Lichtwechsels T identisch mit einer einmaligen Revolution des Sternes, und die Dauer des Lichtwechsels τ mit der Zeit, während welcher der die Veränderung des Lichtes erzeugende Fleck sichtbar ist. $360^0 \frac{\tau}{T}$ ist also die Länge des sichtbaren Teiles eines Parallelkreises, auf welchem sich ein unendlich kleines Element bewegen müsste, um während der Zeit τ eine Lichtschwächung, wie sie beobachtet ist, hervorzubringen, vorausgesetzt, dass dies ein einziger Punkt überhaupt leisten kann. Denken wir uns den nördlichen Pol als den unsichtbaren, so würde jeder Punkt, der sich südlich von jenem Parallel befindet, eine längere Lichtschwächung hervorrufen, als wirklich beobachtet ist. Der Parallelkreis muss also die südliche Begrenzung bilden, über die hinaus sich kein Fleck erstrecken darf.

Teile, deren Abstand vom Südpol kleiner als ε ist, sind circumpolar. Desshalb hat ein kreisförmiger Fleck, dessen sphärischer Radius kleiner als ε ist, auf den Verlauf des Lichtwechsels keinen Einfluss, sondern vermindert die Helligkeit in jedem Augenblicke um eine gewisse constante Grösse.

Für Algol ist:

$\tau = 9^h\,12^m\,0^s$ und:

$T = 2^d\,20^h\,48^m\,53^s{\cdot}67$; also ist der sichtbare Bogen des Parallel:

$$48^0\,7'\,43''.$$

Erteile ich dem Fleck eine Ausdehnung, so ist, wenn er von einem Parallel begrenzt ist, dessen sichtbarer Teil die Länge $2l$ habe, und wenn $2K$ die des Fleckes auf dem Parallel selbst ist:

$$l = 180^0 \cdot \frac{\tau}{T} - K$$

Wenn nun auch im günstigsten Falle ein Fleck zur Zeit des Minimums den von einem Parallel für $K = O$ begrenzten nördlichen Teil der sichtbaren Hemisphäre des Sternes bedecken könnte, so würde doch die Lichtschwächung eine viel zu geringe sein, als dass sie den Beobachtungen entspräche, die beim Algol ein Heruntergehen der Helligkeit bis auf 0.4159 der ursprünglichen Grösse zeigen.

Man ist demnach nicht im stande, die Beobachtungen des Lichtwechsels von β Persei durch die Annahme eines sich auf dem Stern befindenden Fleckes zu erklären, wofern man unter Fleck eine kleinere dunkle Masse versteht. Ich will nun die Helligkeit des von einem Parallelkreis und von dem die sichtbare Hälfte des Sternes einschliessenden grössten Kreises begrenzten sphärischen Zweieckes berechnen. Ich lege durch den Visionsradius nach dem Mittelpunkt des Sternes eine verticale Ebene, welche die Kugel in einem Meridiane schneidet, von welchem aus ich die Länge λ zählen will.

Die Länge des Bogens, der die Südcontour des Fleckes bilden soll, ist gegeben durch die Gleichung:

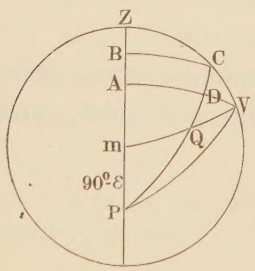
$$l = 180^0 \cdot \frac{\tau}{T} - K.$$

Bei den weiteren Untersuchungen will ich annehmen, dass der Stern keine Atmosphäre und, abgesehen von den Flecken, überall die gleiche Leuchtkraft besitzt. Als Emissionsgesetz lege ich das Cosinusgesetz zu Grunde, nach welchem die scheinbare Intensität eines Flächenelementes proportional dem Cosinus seines Abstandes von dem der Erde am meisten zugewandten Punkte der Oberfläche ist.

Die Helligkeit eines Teilchens wird also:

$$dJ = d\lambda\, d\beta \cos\beta \cos\gamma,$$

falls ich die Helligkeit des ganzen Sternes als Einheit wähle.



Die Helligkeit des sphärischen Rechteckes ZAV (in der nebenstehenden Figur) ist:

$$L' = \int\int d\beta\, d\lambda \cos\beta \cos\gamma$$

Ist P der sichtbare Südpol, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck PMQ:

$$\cos\gamma = \cos\lambda \cos\beta \cos\varepsilon - \sin\beta \sin\varepsilon$$

und für: $\gamma = 90^0$:

$$\cos\lambda = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varepsilon.$$

Die Integration erstreckt sich also in Breite von β_0 bis β, welches durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\varepsilon \cos\lambda$$

gegeben ist; die Grenzen des Integrals für die Länge sind O und λ_0, wo λ_0 und β_0 die Länge und Breite des Punktes V ist.

Da der Bogen l auf einem Parallelkreis liegt, ist:

$$l = \lambda_0 \cos\beta_0.$$

Eliminiert man hieraus β_0, so findet sich:

$$\lambda_0^2 = l^2(1 + \cos^2\lambda_0 \operatorname{ctg}^2\varepsilon).$$

Aus dieser transcendenten Gleichung muss man λ_0 berechnen. Einen ersten Näherungswert erhält man, wenn $\cos\lambda_0$ gleich $\cos l$ setzt; folglich:

$$\lambda_0 = l\sqrt{1 + \cos^2 l \operatorname{ctg}^2\varepsilon}$$

Diesen Wert kann man durch Anwendung einer Differentialformel verbessern; es ist:

$$d\lambda_0 = \frac{dl \cdot 2\lambda_0^2}{l(2\lambda_0 + l^2 \operatorname{ctg}^2\varepsilon \sin 2\lambda_0)}$$

Trägt man den Wert von $\cos\gamma$ in das Integral ein, so folgt:

$$L' = \int_0^{\lambda_0}\int_{\beta_0}^{\beta} \left\{ \cos\lambda\cos\varepsilon \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \sin\varepsilon \frac{\sin 2\beta}{2} \right\} d\lambda\, d\beta$$

Ich führe die Integration über β aus:

$$L' = \frac{1}{4}\int_0^{\lambda_0} \left\{ \cos\varepsilon\cos\lambda \left[\arcsin \frac{2\operatorname{ctg}\varepsilon\cos\lambda}{1+\operatorname{ctg}^2\varepsilon\cos^2\lambda} + \frac{2\operatorname{ctg}\varepsilon\cos\lambda}{1+\operatorname{ctg}^2\varepsilon\cos^2\lambda} \right] \right.$$

$$\left. - \cos\varepsilon\cos\lambda(2\beta_0 + \sin 2\beta_0) + \sin\varepsilon \frac{1-\operatorname{ctg}^2\varepsilon\cos^2\lambda}{1+\operatorname{ctg}^2\varepsilon\cos^2\lambda} - \sin\varepsilon\cos 2\beta_0 \right\} d\lambda$$

Berücksichtigt man die Formel:

$$\int \frac{\sqrt{a+cx^2}}{\alpha+\gamma x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{-c}}{\gamma}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

$$+\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\right),$$

so findet man für die totale Intensität L des sphärischen Zweieckes nach einigen Reductionen die Gleichung:

$$L = 2\left\{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\lambda_0\sin\varepsilon) - \cos^2\beta_0\sin\varepsilon\left(\lambda_0+\frac{\sin 2\lambda_0\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

Nehme ich zum Beispiel an: $\varepsilon = 45^0$ und $K = l$, so wird:

$$l = 12^0\ 1'\ 56''$$
$$\lambda_0 = 16^0\ 39'\ 46''$$
$$\beta_0 = 43^0\ 46'\ 18''$$
$$L = 0.000108$$

Der Lichtverlust beträgt also 0.01 Procent, während die Beobachtungen 58.42 Procent ergeben. Hiermit ist der Beweis geliefert, dass ein einziger, dunkler Fleck den Lichtwechsel des Algol nicht erklären kann.

§ 3.

Um nun diese Erscheinung durch eine möglichst einfache Fleckenverteilung darstellen zu können, will ich annehmen, dass die gesammte Algolkugel bis zu dem die Südcontour des Fleckes bildenden Parallelkreise mit nichtleuchtender Masse belegt sei, und die jeweilige Helligkeit nach trigonometrischen Funktionen des Vielfachen der Zeit entwickeln. Bei dieser Fleckenverteilung habe ich dann nicht mehr einen dunkeln Fleck auf hellem Grunde, sondern einen hellen Fleck auf dunkelm Grunde, dessen Contour wir ermitteln wollen.

Bezeichne ich mit L die nach der Fleckenbelegung übriggebliebene Intensität des Algol, J diejenige, welche der Fleck haben würde, wenn er leuchtete, H die wirklich beobachtete, so ist:

$$H = \frac{L-J}{L}.$$

Die Helligkeit eines Teiles der leuchtenden Oberfläche ist:

$$J = \int\int d\beta\, d\lambda \cos\beta \cos\gamma,$$

wo sich die Integrationsgrenzen in Breite wieder von dem Anfangsparallel β_0 bis zu der Contour des Fleckes β erstrecken. Nehme ich an, das die Länge des Fleckes kleiner sei als der sichtbare Teil des Paralleles β_0,

$$K < l,$$

so habe ich drei Phasen im Verlauf des Lichtwechsels zu unterscheiden.

In der ersten Phase ist der Fleck noch nicht ganz sichtbar; sie dauert bis zu dem Augenblick, in dem das hintere Ende des Fleckes am Rande der sichtbaren Algolhemisphäre auftaucht; von da ab bis zu dem entsprechenden Momente, in dem das vordere Ende des Fleckes auf der entgegengesetzten Seite verschwindet, währt die zweite Phase, während sich die dritte bis zum völligen Verschwinden des Fleckes erstreckt.

Demgemäss hat das Integral in jeder der 3 Phasen verschiedene Integrationsgrenzen in Länge. Behalte ich die früheren Coordinaten bei, so habe ich die Integrale, wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit ist:

$$\text{für die erste Phase: } \int_{-l'}^{\omega t + K'} \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta\, d\lambda \cos\beta \cos\gamma,$$

$$\text{für die zweite Phase: } \int_{\omega t - K'}^{\omega t + K'} \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta\, d\lambda \cos\beta \cos\gamma,$$

$$\text{für die dritte Phase: } \int_{\omega t - K'}^{+l'} \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta\, d\lambda \cos\beta \cos\gamma$$

wo K' und l' die auf den Aequator reducierten Längen des Fleckes und des Paralleles sind.

Ich habe jedoch bei Einführung der Integrationsgrenzen $\pm l'$ eine Vernachlässigung begangen.

Da nämlich der Rand der sichtbaren Algolhalbkugel nicht auf dem Parallel β_0 senkrecht steht, so erstreckt sich die obige Integration auch auf den Teil des Fleckes, der auf der hinteren Seite des Sternes liegt und von dem zu $\pm l'$ gehörigen Längenkreis und dem Rande begrenzt

ist. Für diesen Teil ist γ grösser als 90^0; die aus den obigen Integralen berechnete Helligkeit ist daher etwas kleiner als die beobachtete. Es muss also erst gezeigt werden, dass dieser Unterschied zu klein ist, um auf die Genauigkeit der photometrischen Messungen einen wirklichen Einfluss auszuüben.

Die Helligkeit des zu vernachlässigenden Teil des Fleckes ist, wenn $BCVA$ den Fleck darstellt, bis auf das Vorzeichen gleich der des sphärischen Dreiecks CDV. Dieses ist aber die Differenz der beiden Figuren ZAV und $ZADC$. Da die Gleichung für L nur gilt für das aus der Gleichung:

$$\cos\lambda_0 = \operatorname{tg}\beta_0 \operatorname{tg}\varepsilon$$

bestimmte λ_0, so muss man, um die Helligkeit von $ZADC$ zu finden, auf das Integral selbst zurückgehen; dann ist:

$$L(ZADC) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\lambda\sin\varepsilon) - \cos^2\beta_0 \sin\varepsilon\,(\lambda + \sin\lambda \operatorname{ctg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0) + \sin\lambda\cos\varepsilon\,(\beta_0' - \beta_0),$$

wo λ die Länge und β_0' die Breite von C ist.

Ein Ueberschlag ergiebt, dass wir den Verhältnissen bei Algol ungefähr genügen, wenn wir für den Fall:

$$\varepsilon = 45^0,\ K = l,\ \beta_0' - \beta_0 = 0^0\,20'\ \text{annehmen.}$$

Dann wird:

$$L(ZBC) = 0.000025,$$

während die Helligkeit von

$$ZAV = 0.000054\ \text{ist.}$$

Weiter wird:

$$\lambda = 14^0\,17'\,2''\ \text{und}\ L(ZADC) = 0.000053,$$

sodass die Vernachlässigung bei der Integration 0.000001 beträgt. Sie ist stets kleiner als 4 Procent der jeweiligen Helligkeit, welchen Betrag sie erreichen würde, wenn $K > l$ wäre.

Da jedoch gute photometrische Messungen eine Genauigkeit von 3—4 Procent besitzen, so erscheint diese Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt, zumal da die Vorteile, welche diese Anordnung der Integration bietet, zu gross sind, als dass man sie gegen eine strenge Durchführung aufgeben sollte. Es wäre nun aber sehr erwünscht, wenn man

die Integrale mit den verschiedenen Grenzen innerhalb der 3 Phasen in einen einzigen Ausdruck, der für die ganze Dauer des Lichtwechsels seine Giltigkeit behält, zusammenfassen könnte. Hierzu bediene ich mich gewisser Discontinuitätsfactoren, die man auf bekannte Art berechnen kann.

Sind ε_1, ε_2, ε_3 Discontinuitätsfaktoren, die während eines gleich zu bestimmenden Intervalles den Wert Eins haben, im übrigen aber Null sind, so ist:

$$J = \varepsilon_1 \int_{-l'}^{\omega t + K'} \int d\beta \, d\lambda \cos\beta \cos\gamma$$

$$+ \varepsilon_2 \int_{\omega t - K'}^{\omega t + K'} \int d\beta \, d\lambda \cos\beta \cos\gamma$$

$$+ \varepsilon_3 \int_{\omega l - K'}^{+l'} \int d\beta \, d\lambda \cos\beta \cos\gamma.$$

Den Wert Eins dürfen die ε nur in folgenden Intervallen haben:

ε_1 von : $\omega t = -K - l$ bis $\omega t = K - l$;
ε_2 von : $\omega t = K - l$ bis $\omega t = l - K$;
ε_3 von : $\omega t = l - K$ bis $\omega t = l + K$.

Diese Coefficienten sind so gewählt, dass immer nur Einer zu gleicher Zeit gleich Eins ist; an den Grenzen haben sie den Wert $^1/_2$.

Setze ich das unbestimmte Integral:

$$\int \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta \, d\lambda \cos\beta \cos\gamma = J(\lambda),$$

so wird:

$$J = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) J(\omega t + K') - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) J(\omega t - K') + \varepsilon_3 J(+l') - \varepsilon_1 J(-l').$$

Im vorigen Paragraphen ist bereits die Integration nach β ausgeführt. Es wird:

$$\frac{4 J(\lambda)}{\cos\varepsilon} = \int \Big\{ \cos\lambda \left[2\beta - 2\beta_0 + \sin 2\beta - \sin 2\beta_0 \right]$$
$$- \operatorname{tg}\varepsilon \left[\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta \right] \Big\} d\lambda.$$

λ war die Länge eines Punctes auf dem Stern, von einem im Raum festen Anfangsmeridian gezählt. Nehme ich an, dass für $\lambda = o$ auch $t = o$ sei, so ist:

$$\lambda = \omega t,$$

wo ω die Drehungsgeschwindigkeit ist. Für andere Punkte, die nicht dieser Bedingung genügen, ist:

$$\lambda = \omega t + \eta,$$

wo η die Länge von dem im Raume beweglichen, aber mit dem Stern fest verbundenen Anfangsmeridian gerechnet ist.

Um auch die andere Integration nach λ ausführen zu können, muss man β als Funktion von λ darstellen. Da aber der Fleck auf dem Stern gegen denselben seine Lage unverändert beibehalten soll, ist β unabhängig von der Zeit. Die Contour des Fleckes wird also dargestellt durch die Gleichung:

$$F(\beta, \eta) = o,$$

wodurch die Integration ermöglicht ist.

Zwischen dieser Funktion und den beiden unter dem Integralzeichen:

$$2\beta + \sin 2\beta \text{ resp. } \cos 2\beta$$

müsste man dann Relationen aufstellen, um alles durch η auszudrücken; dies würde jedoch sehr schwierig sein. Begnüge ich mich aber mit einer nicht ganz strengen Lösung, so fallen diese Schwierigkeiten hinweg. Es ist:

$$\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta = 2 \sin(\beta + \beta_0) \sin(\beta - \beta_0);$$

$$2\beta - 2\beta_0 + \sin 2\beta - \sin 2\beta_0 = 2\left\{\beta - \beta_0 + \sin(\beta - \beta_0) \cos(\beta + \beta_0)\right\}.$$

Nun hat man gesehen, dass die Breite des Fleckes nur sehr klein sein kann, im Maximum $30'$; ich werde deshalb mit grosser Annäherung setzen können:

$$\sin(\beta - \beta_0) = \beta - \beta_0 \text{ und: } \beta + \beta_0 = 2\beta_0,$$

sodass ich schliesslich erhalte:

$$\cos 2\beta_0 - \cos 2\beta = 2 \sin 2\beta_0 (\beta - \beta_0) \text{ und:}$$

$$2\beta - 2\beta_0 + \sin 2\beta - \sin 2\beta_0 = 4 \cos^2 \beta_0 (\beta - \beta_0).$$

Für den öfters erwähnten Fall:

$$\varepsilon = 45^0 \text{ und } K = l$$

wird, wenn ich: $\beta - \beta_0 = 30'$ annehme:

$$\begin{aligned} \cos 2\beta - \cos 2\beta &= 0.0174419 \text{ (streng)} \\ &= 0.0174372 \text{ (angenähert).} \end{aligned}$$

Der Fehler beträgt etwa 5 Einheiten der sechsten Stelle, eine Grösse, die bei photometrischen Messungen zu berücksichtigen vollständig überflüssig ist.

Aehnlich wird:

$$\begin{aligned} 2\beta - 2\beta_0 + \sin 2\beta - \sin 2\beta_0 &= 0.018046 \text{ (streng)} \\ &= 0.018201 \text{ (genähert).} \end{aligned}$$

Der Fehler beträgt 0.000155. Obschon er bedeutend grösser ist, als der vorige, 2 Einheiten der 4. Stelle, wird doch auch hier die Genauigkeit der Beobachtungen vollkommen eingehalten.

Entwickelt man die Fehler:

$$\Delta' = (\beta - \beta_0) + \sin(\beta - \beta_0)\cos(\beta + \beta_0) - 2(\beta - \beta_0)\cos^2\beta_0 \text{ und:}$$

$$\Delta'' = \sin(\beta - \beta_0)\sin(\beta + \beta_0) - (\beta - \beta_0)\sin 2\beta_0.$$

in eine nach Potenzen von $\beta - \beta_0$ fortschreitende Reihe, so wird:

$$\Delta' = -(\beta - \beta_0)^2 \sin 2\beta_0 - \frac{2}{3}(\beta - \beta_0)^3 \cos 2\beta_0 + \frac{(\beta - \beta)^4}{3} \sin 2\beta_0$$

$$+ \frac{2}{15}(\beta - \beta_0)^5 \cos 2\beta_0 - \frac{(\beta - \beta_0)^6}{36} \sin 2\beta_0 \cdots \text{ und:}$$

$$\Delta'' = (\beta - \beta_0)^2 \cos 2\beta_0 + \frac{2}{3}(\beta - \beta_0)^3 \sin 2\beta_0 - \frac{(\beta - \beta_0)^4}{3} \cos 2\beta_0$$

$$- \frac{2}{15}(\beta - \beta_0)^5 \sin 2\beta_0 + \frac{(\beta - \beta_0)^6}{36} \cos 2\beta_0 \cdots$$

Um zu finden, für welches β_0 bei bekannter Breite des Fleckes die Fehler am grössten sind, setze ich die Differentialquotienten der Δ nach β_0 Null. Sind β_0' und β_0'' die Maximalwerte, so wird:

$$\operatorname{tg} 2\beta_0' = \frac{2\sin^2(\beta - \beta_0)}{2(\beta - \beta_0) - \sin 2(\beta - \beta_0)};$$

$$\operatorname{tg} 2\beta_0'' = \frac{2(\beta-\beta_0)-\sin 2(\beta-\beta_0)}{2\sin^2(\beta-\beta_0)}.$$

Hieraus folgt:

$$\beta_0' + \beta_0'' = 45^0$$

und, wenn ich $\operatorname{tg} 2\beta_0''$ wieder nach $(\beta-\beta_0)$ entwickele:

$$\operatorname{tg} 2\beta_0'' = \frac{2}{3}(\beta-\beta_0) + \frac{4}{45}(\beta-\beta_0)^3 + \frac{4}{315}(\beta-\beta_0)^5 \cdots$$

Ist $(\beta-\beta_0)$ sehr klein, so ist:

$$\beta_0'' = \frac{\beta-\beta_0}{3};$$

$$\beta_0' = 45^0 - \frac{\beta-\beta_0}{3}.$$

Bestimme ich für diese β_0 die zugehörigen ε aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \cos\left(\frac{l}{\cos\beta_0}\right)\cdot\operatorname{ctg}\beta_0$$

so erhalte ich:

$$\varepsilon_0'' = 90^0 - \frac{\beta-\beta_0}{3\cos l} \text{ und:}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_0' = \cos\left(\frac{l\sqrt{2}}{1+\frac{\beta-\beta_0}{3}}\right)\cdot\frac{1+(\beta-\beta_0)\frac{1}{3}}{1-(\beta-\beta_0)\frac{1}{3}};$$

$$\varepsilon_0' = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left\{\left(1+\frac{2}{3}(\beta-\beta_0)\right)\cos l\sqrt{2} + l\sqrt{2}\,\frac{\beta-\beta_0}{3}\sin l\sqrt{2}\right\}$$

Trage ich statt der früheren Ausdrücke: $2\beta+\sin 2\beta$ und $\cos 2\beta$ die vereinfachten in das Integral $J(\eta)$ ein, so wird:

$$\frac{J(\eta)}{\cos\varepsilon\cos^2\beta_0} = \int[\cos(\eta+\omega t) - \operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\beta_0](\beta-\beta_0)\,d\eta$$

Besonders einfach wird sich nun die Integration gestalten, wenn ich $\beta-\beta_0$ als eine periodische Funktion von η annehme in der Form:

$$\beta-\beta_0 = \sum_{i=o}^{i=n} a_i\cos i\eta + \sum_{i=o}^{i=n} b_i\sin i\eta.$$

t ist in dem Integral als constant zu betrachten; zerlegt man das Produkt zweier Cosinus oder Sinus in die entsprechenden Summen oder Differenzen und integriert, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{2J(\eta)}{\cos\varepsilon\cos^2\beta_0} = \quad & a_0\sin(\eta+\omega t)+a_1\eta\cos\omega t \\
& +\frac{a_1}{2}\sin(2\eta+\omega t) \\
& +\frac{a_2}{3}\sin(3\eta+\omega t)+\frac{a_2}{1}\sin(\eta-\omega t) \\
& +\frac{a_3}{4}\sin(4\eta+\omega t)+\frac{a_3}{2}\sin(2\eta-\omega t) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -\frac{b_1}{2}\cos(2\eta+\omega t)-b_1\eta\sin\omega t \\
& -\frac{b_2}{3}\cos(3\eta+\omega t)-\frac{b_2}{1}\cos(\eta-\omega t) \\
& -\frac{b_3}{4}\cos(4\eta+\omega t)-\frac{b_3}{2}\cos(2\eta-\omega t) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -2\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\beta_0\Big\{a_1\sin\eta+\frac{a_2}{2}\sin 2\eta+\frac{a_3}{3}\sin 3\eta\ \ldots \\
& \qquad -b_1\cos\eta-\frac{b_2}{2}\cos 2\eta-\frac{b_3}{3}\cos 3\eta\ \ldots\Big\} \\
= \quad & a_1\eta\cos\omega t-b_1\eta\sin\omega t+a_0\eta \\
& +\sum_{i=0}^{i=n}\frac{a_i}{i+1}\sin\big[(i+1)\eta+\omega t\big]+\sum_{i=0}^{i=n}\frac{a_{i+2}}{i+1}\sin\big[(i+1)\eta-\omega t\big] \\
& -\sum_{i=0}^{i=n}\frac{b_i}{i+1}\cos\big[(i+1)\eta+\omega t\big]-\sum_{i=0}^{i=n}\frac{b_{i+2}}{i+1}\cos\big[(i+1)\eta-\omega t\big] \\
& -2\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\beta_0\Big\{\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i}{i}\sin i\eta-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{b_i}{i}\cos i\eta\Big\}
\end{aligned}$$

Setze ich hierin die Integrationsgrenzen $\omega t + K'$, $\omega t - K'$, $+l'$ und $-l'$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{2J(\omega t \pm K')}{\cos\varepsilon\cos^2\beta_0} = {} & \pm a_2 \sin K' - b_2 \cos K' \pm a_0 K' \\
& + a_1 \omega t \cos \omega t - b_1 \sin \omega t \cdot \omega t + a_0 \omega t \\
& + \cos \omega t \Big(\pm \frac{a_3}{2} \sin 2K' - \frac{b_3}{2} \cos 2K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 \\
& \quad \times (\pm a_1 \sin K' - b_1 \cos K') \Big) \\
& + \cos 2\omega t \Big(\pm \frac{a_4}{3} \sin 3K' - \frac{b_4}{3} \cos 3K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 \\
& \quad \times (\pm \frac{a_2}{2} \sin 2K' - \frac{b_2}{2} \cos 2K') \Big) \\
& + \cos 3\omega t \Big(\pm \frac{a_1}{2} \sin 2K' - \frac{b_1}{2} \cos 2K' \pm \frac{a_5}{4} \sin 4K' \\
& \quad - \frac{b_5}{4} \cos 4K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 (\pm \frac{a_3}{3} \sin 3K' - \frac{b_3}{3} \cos 3K') \Big) \\
& + \cos 4\omega t \Big(\pm \frac{a_2}{3} \sin 3K' - \frac{b_2}{3} \cos 3K' \pm \frac{a_6}{5} \sin 5K' \\
& \quad - \frac{b_6}{5} \cos 5K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 (\pm \frac{a_4}{4} \sin 4K' - \frac{b_4}{4} \cos 4K') \Big) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \sin \omega t \Big(\frac{a_3}{2} \cos 2K' \pm \frac{b_3}{2} \sin 2K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 \\
& \quad \times (a_1 \cos K' \pm b_1 \sin K') \Big) \\
& + \sin 2\omega t \Big(\frac{a_4}{3} \cos 3K' \pm \frac{b_4}{3} \sin 3K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 \\
& \quad \times (\frac{a_2}{2} \cos 2K' \pm \frac{b_2}{2} \sin 2K') \Big) \\
& + \sin 3\omega t \Big(\frac{a_1}{2} \cos 2K' \pm \frac{b_1}{2} \sin 2K' + \frac{a_5}{4} \cos 4K' \\
& \quad \pm \frac{b_5}{4} \sin 4K' - 2 \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta_0 (\frac{a_3}{3} \cos 3K' \pm \frac{b_3}{3} \sin 3K') \Big)
\end{aligned}$$

$$+\sin 4\,\omega t\Big(\frac{a_2}{3}\cos 3\,K' \pm \frac{b_2}{3}\sin 3\,K' + \frac{a_6}{5}\cos 5\,K'$$

$$\pm \frac{b_6}{5}\sin 5\,K' - 2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta_0\Big(\frac{a_4}{4}\cos 4\,K' \pm \frac{b_4}{4}\sin 4\,K'\Big)\Big)$$

. . . . . .

$$= a_1\,\omega t\cos\omega t - b_1\,\omega t\sin\omega t + a_0\,\omega t + a_0\,K'$$

$$+\sum_{i=0}^{i=n}\Big\{\pm\frac{a_{i+2}}{i+1}\sin(i+1)\,K' - \frac{b_{i+2}}{i+1}\cos(i+1)\,K' \pm \frac{a_{i-2}}{i-1}\sin(i-1)\,K'$$

$$-\frac{b_{i-2}}{i-1}\cos(i-1)\,K' - 2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta_0\Big(\pm\frac{a_i}{i}\sin i\,K' - \frac{b_i}{i}\cos i\,K'\Big)\Big\}\cos i\,\omega t$$

$$+\sum_{i=0}^{i=n}\Big\{\frac{a_{i+2}}{i+1}\cos(i+1)\,K' \pm \frac{b_{i+2}}{i+1}\sin(i+1)\,K' + \frac{a_{i-2}}{i-1}\cos(i-1)\,K'$$

$$\pm\frac{b_{i-2}}{i-1}\sin(i-1)\,K' - 2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta_0\Big(\frac{a_i}{i}\cos i\,K' \pm \frac{b_i}{i}\sin i\,K'\Big)\Big\}\sin i\,\omega t$$

$$\frac{2\,J(\pm l')}{\cos\varepsilon\cos^2\beta_0} = -2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta_0\Big\{a_0\,l' + \sum_{i=1}^{i=n}\Big(\pm\frac{a_i}{i}\cos i\,l' - \frac{b_i}{i}\sin i\,l'\Big)\Big\}$$

$$+\Big\{\pm a_1\,l' + \sum_{i=0}^{i=n}\Big(\pm\frac{a_i}{i+1}\sin(i+1)\,l' - \frac{b_i}{i+1}\cos(i+1)\,l'\Big)$$

$$+\sum_{i=2}^{i=n}\Big(\pm\frac{a_i}{i-1}\sin(i-1)\,l' - \frac{b_i}{i-1}\cos(i-1)\,l'\Big)\Big\}\cos\omega t$$

$$+\Big\{+b_1\,l' + \sum_{i=0}^{i=n}\Big(\frac{a_i}{i+1}\cos(i+1)\,l' + \frac{b_i}{i+1}\sin(i+1)\,l'\Big)$$

$$-\sum_{i=2}^{i=n}\Big(\frac{a_i}{i-1}\cos(i-1)\,l' \pm \frac{b_i}{i-1}\sin(i-1)\,l'\Big)\Big\}\sin\omega t.$$

Etwas einfacher wird das Endresultat, wenn ich setze:

$$a_i = \mu_i \sin \xi_i ;$$
$$b_i = \mu_i \cos \xi_i .$$

Da es nicht wesentlich ist, dass die Coefficienten der periodischen Reihe für $\beta - \beta_0$ oder die μ_i und ξ_i direkt im Endresultat auftreten, führe ich ein:

$$\tau = 2 \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \beta_0 ; \frac{b_i \cos nK' \mp a_i \sin nK'}{n} = \frac{\mu_i \cos (\xi_i \pm nK')}{n} = c_i^{\pm n},$$

$$\frac{b_i \sin nK' \pm a_i \cos nK'}{n} = \frac{\mu_i \sin (\xi_i \pm nK')}{n} = s_i^{\pm n},$$

$$\frac{b_i \cos nl' \mp a_i \sin nl'}{n} = \frac{\mu_i \cos (\xi_i \pm nl')}{n} = \gamma_i^{\pm n},$$

$$\frac{b_i \sin nl' \pm a_i \cos nl'}{n} = \frac{\mu_i \sin (\xi_i \pm nl')}{n} = \sigma_i^{\pm n},$$

und erhalte schliesslich:

$$H = 1 - \frac{\cos \varepsilon \cos^2 \beta_0}{2L} \Big\{ a_0 K' (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \tau l' + \varepsilon_3 \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^i - \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^{-i}$$
$$- (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_0 \omega t \Big(1 + \frac{a_1}{a_0} \cos \omega t - \frac{b_1}{a_0} \sin \omega t \Big)$$
$$+ \cos \omega t \Big\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_1 l' + \Big(\sum_{i=2}^{i=n} \gamma_i^{-i+1} + \sum_{i=0}^{i=n} \gamma_i^{-i-1} \Big) \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \Big(\sum_{i=2}^{i=n} \gamma_i^{i-1} + \sum_{i=0}^{i=n} \gamma_i^{i+1} \Big) \Big\}$$
$$+ \sin \omega t \Big\{ -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) b_1 l' + \varepsilon_1 \Big(\sum_{i=2}^{i=n} \sigma_i^{-i+1} + \sum_{i=0}^{i=n} \sigma_i^{-i-1} \Big) - \varepsilon_3 \Big(\sum_{i=2}^{i=n} \sigma_i^{i-1} - \sum_{i=0}^{i=n} \sigma_i^{i+1} \Big) \Big\}$$
$$+ \sum_{i=0}^{i=n} \Big\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \big(\tau c_i^i - c_{i+2}^{i+1} - c_{i-2}^{i-1} \big) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \big(\tau c_i^{-i} - c_{i+2}^{-i-1} - c_{i-2}^{-i+1} \big) \Big\} \cos i \omega t$$
$$+ \sum_{i=0}^{i=n} \Big\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \big(-\tau s_i^i + s_{i+2}^{i+1} + s_{i-2}^{i-1} \big) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \big(-\tau s_i^i + s_{i+2}^{-i-1} + s_{i-2}^{-i+1} \big) \Big\} \sin i \omega t \Big\}.$$

Diese Formel zeigt, dass man die jeweilige Helligkeit unter Annahme einer bestimmten Fleckenverteilung durch eine Funktion darstellen kann, deren Genauigkeit der von photometrischen Messungen genügt, und welche

sich aus einer periodischen Reihe, einer linearen Function der Zeit und Gliedern von der Form $\omega t \sin \omega t$ und $\omega t \cos \omega t$ zusammensetzt, während die strenge von Bruns abgeleitete nach Kugelfunctionen fortschreitet. Der andere Fall, $K > l$, führt auf eine ähnliche Gleichung, die leicht aufzustellen ist.

§ 4.

Man könnte nun, wenn man die beobachtete Helligkeit in eine Reihe entwickelt von der Form:

$$H = \sum_{i=0}^{i=n} p_i \cos i\omega t + \sum_{i=0}^{i=n} q_i \sin i\omega t + \alpha \omega t + \beta \omega t \cos \omega t + \gamma \omega t \sin \omega t$$

aus den Coefficienten dieser Reihe mittelst linearer Gleichungen die a und b, also auch die Contour des Fleckes berechnen. Jedoch würden diese Rechnungen wegen der Discontinuitätsfaktoren nur für eine Phase gelten, wesshalb ich nicht weiter darauf eingehe. Wir wollen nun die beobachtete Helligkeit nach trigonometrischen Funktionen des Vielfachen der Zeit entwickeln.

Den Beobachtungen der Helligkeitsverhältnisse des Algol, die besonders von Argelander und Schönfeld angestellt worden sind, liegt als Einheit die Stufe zu Grunde, d. h. der Unterschied in der Helligkeit zweier Objekte, der sich grade noch constatieren lässt. In der Regel nimmt man zwischen 2 Grössenklassen 10 Stufen an. Da jedoch der Unterschied von einer Stufe dem Quotienten der Helligkeiten entspricht muss man noch die Beobachtungen, um sie für die Rechnung handlich' zu machen, auf eine Normalhelligkeit reducieren. Diese Reduktion hat Pickering in seiner oben citierten Abhandlung durchgeführt; als Einheit ist die Intensität zur Zeit des Maximums angenommen. Er findet nach sorgfältiger Discussion der Beobachtungen folgende Werte[1]) für die jeweilige Helligkeit des Algol:

1) Herr Plassmann erwähnt zu wiederholten Malen in seiner citierten Schrift, wie in einem Aufsatze im „Sirius", dass der Lichtwechsel beim Algol vollständig symmetrisch zum Minimum vor sich geht. Wie die Tafel zeigt, ist dies nicht der Fall.

t	H	D
— 4.6	1.0000	0 0000
— 4.5	0.9943	0.0057
— 4.0	0.9683	0.0317
— 3.5	0.9328	0.0672
— 3.0	0.8851	0.1149
— 2.5	0.8200	0.1800
— 2.0	0.7278	0.2722
— 1.5	0.6044	0.3956
— 1.0	0.4920	0.5080
— 0.5	0.4330	0.5670
0.0	0.4159	0.5841
+ 0.5	0.4315	0.5685
+ 1.0	0.4677	0.5323
+ 1.5	0.5312	0.4688
+ 2.0	0.6446	0.3554
+ 2.5	0.7490	0.2510
+ 3.0	0.8371	0.1629
+ 3.5	0.9064	0.0936
+ 4.0	0.9778	0.0222
+ 4.5	0.9972	0.0028
+ 4.6	1.0000	0.0000

Die Reihe, in welche wir die Helligkeit entwickeln wollen, hat, wie oben erwähnt, die Form:

$$J = \sum_{i=o}^{i=n} a_i \cos i\omega t + \sum_{i=o}^{i=n} b_i \sin i\omega t.$$

Die Intervalle zwischen den einzelnen Beobachtungen sind mit Ausnahme des letzten zwischen $t = \pm 4.5$ und ± 4.6 gleich. Sehe ich die a_i und b_i als Unbekannte an, so habe ich ein System von Bedingungsgleichungen, das ich nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen müsste; indessen kann ich durch folgende Betrachtung sofort zu den Normalgleichungen gelangen.

Da die Beobachtungen symmetrisch zum Nullpunkt der Zeitzählung liegen, unterscheiden sich die Ausdrücke für zwei derartige Beobachtungen nur durch das verschiedene Vorzeichen der zweiten Summe der Sinus-

glieder. Jede der bei der Auflösung solcher Gleichungen auftretende Summe von Produkten eines Cosinus — in einen Sinuscoefficienten ist also Null:

$$[a_p b_q] = o,$$

wo p und q alle Werte von o bis n durchlaufen können. Das System der Unbekannten a_i und b_i zerfällt demnach in zwei, aus denen man die Cosinuscoefficienten a_i und die Sinuscoefficienten b_i getrennt von einander bestimmen kann. Was die andern Summenausdrücke betrifft, so haben die der a_i die Form:

$$[a_p a_q] = 1 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \cos i p\,\omega \cos i q\,\omega + 2\cos p\,\varrho \cos q\,\varrho, \text{ wo:}$$

$$\varrho = \omega t \text{ ist für } t = \pm 4.6.$$

Zerlege ich die einzelnen Cosinusproducte, so wird:

$$[a_p a_q] = 1 + \sum_{i=1}^{i=n} \cos(p+q) i\,\omega + \sum_{i=1}^{i=n} \cos(q-p) i\,\omega + \cos(p+q)\varrho + \cos(q-p)\varrho.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \cos \lambda x = \frac{\cos(n+1)\frac{\lambda x}{2} \sin \frac{\lambda n}{2} x}{\sin \frac{\lambda x}{2}}, \text{ also:}$$

$$[a_p a_q] = 1 + \frac{\cos \frac{(n+1)(q+p)\omega}{2} \sin \frac{n(q+p)\omega}{2}}{\sin \frac{(p+q)\omega}{2}} + \frac{\cos \frac{(n+1)(q-p)\omega}{2} \sin \frac{n(q-p)\omega}{2}}{\sin \frac{(q-p)\omega}{2}}$$

$$+ \cos(q+p)\varrho + \cos(q-p)\varrho.$$

Setze ich:

$$\frac{\cos \frac{(n+1)k\omega}{2} \sin \frac{nk\omega}{2}}{\sin \frac{k\omega}{2}} + \cos k\varrho = A_k,$$

so wird:

$$[a_p a_q] = 1 + A_{q+p} + A_{q-p}, \text{ insbesondere:}$$

$$[a_0 a_0] = 2n + 3.$$

Analog werden die Summen der Produkte der Sinuscoefficienten:

$$[b_p b_q] = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sin i p \omega \sin i q \omega + 2 \sin p \varrho \sin q \varrho.$$

Zerlegt man wieder die Sinus, so findet man:

$$[b_p b_q] = A_{q-p} - A_{q+p}.$$

Schliesslich bleiben noch die Summen von der Form $[a_p N]$ resp. $[b_p N]$ übrig, wo N die linke Seite war.

Es ist:

$$[a_p N] = \sum_{i=o}^{i=n} \cos i p \omega (N_i + N_{-i}) + \cos p \varrho (N_\varrho + N_{-\varrho})$$

$$[b_p N] = \sum_{i=o}^{i=n} \sin i p \omega (N_i - N_{-i}) + \sin p \varrho (N_\varrho - N_{-\varrho}).$$

Wenn ich nicht die Helligkeit H selbst, sondern $1 - H$ entwickle, so wird:

$$N_\varrho = N_{-\varrho} = o$$

und wenn ich setze:

$$N_i + N_{-i} = S_i; \; N_i - N_{-i} = D_i:$$

$$[a_p N] = \sum_{i=o}^{i=n} \cos i p \omega S_n; \; [b_p N] = \sum_{i=o}^{i=n} \sin i p \omega D_n.$$

Ich habe im Vorhergehenden der kürze halber $\omega(t_2 - t_1)$ mit ω bezeichnet. Es ist also:

$$\omega = 360^0 \cdot \frac{0^h.5}{68^h.816} = 2^0\,36'.93.$$

Da sich die aequidistanten Beobachtungen bis $t = \pm 4.5$ erstrecken, wird: $n = 9$ und:

$$\varrho = 24^0\,3'.84.$$

Geht man bis zu den Gliedern $\cos 5 \omega t$ resp. $\sin 5 \omega t$ inclusive und berechnet mit den vorstehenden Daten die A, so findet man folgende Normalgleichungen:

I. für die Cosinuscoefficienten.

$21\,a_0 +$	$20.2406\,a_1 +$	$18.0466\,a_2 +$	$14.6990\,a_3 +$	$10.5036\,a_4 +$	$6.2502\,a_5 =$	5.1839
20.2406	19.5233	17.4698	14.3251	10.4746	6.3707	5.1259
18.0466	17.4698	15.8018	13.2454	10.0922	6.7050	4.9554
14.6990	14.3251	13.2454	11.5689	9.4758	7.1607	4.6827
10.5036	10.4746	10.0922	9.4758	8.6373	7.6261	4.3199
6.2502	6.3707	6.7050	7.1607	7.6261	7.9541	3.8908

II. für die Sinuscoefficienten.

$1.4767\,b_1 +$	$2.7708\,b_2 +$	$3.7215\,b_3 +$	$4.2244\,b_4 +$	$4.2329\,b_5 =$	0.061175
2.7708	5.1982	6.9952	7.9544	7.9940	0.117641
3.7215	6.9952	9.4311	10.7648	10.8859	0.169837
4.2244	7.9544	10.7648	12.3626	12.6145	0.214377
4.2329	7.9940	10.8859	12.6145	13.0459	0.249396.

Hieraus ergeben sich die Coefficienten:

$$\log a_0 = 0.5610;\ \log a_1 = 0.1004;\ \log a_2 = 0.7005\,n;\ \log a_3 = 0.3387\,n;$$
$$\log a_4 = 0.2538;\ \log a_5 = 0.0391;$$
$$\log b_1 = 0.2730;\ \log b_2 = 9.2041;\ \log b_3 = 8.7243\,n;\ \log b_4 = 0.0734;$$
$$\log b_5 = 9.7570\,n.$$

Setze ich dies ein, so finde ich für die jeweilige Helligkeit:

t	Ber. $1-H$	Ber. — Beob.
— 4.6	0.039	0.039
— 4.5	0.020	0.014
— 4.0	— 0.013	— 0.045
— 3.5	0.017	— 0.050
— 3.0	0.087	— 0.028
— 2.5	0.195	+ 0.015
— 2.0	0.307	0.035
— 1.5	0.414	0.018
— 1.0	0.503	— 0.005
— 0.5	0.560	— 0.007
0.0	0.588	0.004
0.5	0.580	0.012
1.0	0.533	0.001
1.5	0.456	— 0.013
2.0	0.361	0.006
2.5	0.257	0.006
3.0	0.149	— 0.014
3.5	0.069	— 0.025
4.0	0.015	— 0.007
4.5	0.008	0.005
4.6	0.015	0.015

Weiter wird:

$$\Sigma[v\,v] = 0.009996$$

und der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v\,v]}{10}} = 0.0316.$$

Die Darstellung der Helligkeit durch die periodische Reihe, die, wie man sieht, am besten in der Nähe des Minimums ist, besitzt eine Genauigkeit von 3.16 Procent, wie sie guten photometrischen Messungen innewohnt.

§ 5.

Ich gehe nun zu der Betrachtung der Pickering'schen Trabantenhypothese über.

Um den Lichtwechsel in möglichst einfacher Weise darstellen zu können, mache ich folgende Voraussetzungen:

1. Der Stern Algol und sein Begleiter sind Kugeln.
2. Man kann Algol als eine gleichmässig erleuchtete Scheibe ansehen.
3. Der den Lichtwechsel hervorrufende Trabant ist absolut dunkel.

Die Voraussetzung 1. kann stets gemacht werden, wenn die Entfernung der beiden Körper so gross ist, dass man von der gegenseitigen Einwirkung auf ihre Figur absehen kann. Am Schluss komme ich hierauf noch zurück.

Die zweite Prämisse ist vielleicht nicht streng erfüllt, da man nicht weiss, ob die Helligkeit genau nach dem Cosinusgesetz variiert; doch genügt sie immerhin für eine sehr grosse Approximation; auch würden sehr grosse Complicationen entstehen, wenn man sie weglässt.

Was die dritte Hypothese betrifft, so muss dieselbe gemacht werden, weil sich sonst durch Annahme eines, wenn auch schwach leuchtenden Trabanten 2 Maxima und 2 Minima, ähnlich wie bei β Lyrae ergeben würden, was bei Algol nicht beobachtet ist.

Meinen Rechnungen liegt die im § 4 angegebene Tabelle zu Grunde. Um eine die Beobachtungen darstellende Bahn des Trabanten um den Hauptstern zu erhalten, muss man zuerst das Verhältnis der Durchmesser der beiden Körper kennen lernen. Einen approximativen Wert erhalte ich aus der Annahme, dass der dunkle Körper zur Zeit des Minimums sich vollständig auf dem andern projiciert, eine Annahme, die, wie sich zeigen wird, in sehr grosser Annäherung den Durchmesser des Trabanten ergiebt. Diesen Wert werden wir später durch Anwendung von Differentialformeln verbessern.

Wenn also der Trabant sich vollständig auf Algol projiciert, so verhält sich die Intensität zur Zeit des Maximums zu der zur Zeit des Minimums wie die Algolscheibe zu der Differenz von Algol- und Trabantenscheibe. Bezeichnen wir mit R den Radius des Algol, mit r den des Trabanten, mit i die Helligkeit zur Zeit des Minimums:

$$\frac{R^2\pi}{R^2\pi - r^2\pi} = \frac{1}{i} \text{ und:}$$

$$r = R\sqrt{1-i}.$$

Pickering führt nun gleich absolute Werte ein; er setzt den Halbmesser des Algol:

$$R = 0''.00304,$$

einen Wert, den er aus der Annahme gleicher Helligkeit wie der Sonne erhält. Da jedoch diese Einführung sich auf den ersten Blick als eine nicht zu rechtfertigende erweist, so werde ich im ganzen Verlauf der Rechnung den Algolradius als Einheit annehmen und setzen:

$r = \varkappa R$. Demnach wird:

$\varkappa = \sqrt{1-i}$; numerisch:

$\varkappa = 0.7643$; $\log \varkappa = 9.8832$.

Um uns zunächst eine erste Approximation zu verschaffen, wollen wir annehmen, dass die Bahn des Trabanten ein Kreis sei. Hierzu berechtigt uns der Umstand, dass die Helligkeiten für zwei Zeitmomente, die symmetrisch zum Nullpunkt liegen, nicht so sehr von einander verschieden sind, als es in einer ersten Annäherung nicht mehr hinreichend wäre. Die Elemente dieser Bahn bestehen aus zwei Stücken: dem Halb-

messer des Kreises und der Neigung der Bahn gegen die Ebene, welche auf dem Visionsradius Erde-Algol senkrecht steht. Die Länge des Knotens bleibt uns wegen der Natur der Aufgabe unbekannt, wohingegen wir die Epoche aus der Beobachtung kennen.

Zur ersten Bestimmung der Elemente bediene ich mich einer Methode, die geeignet ist, ohne erhebliche Rechnung einen Ueberblick über Gestalt und Lage der Bahn zu geben, obschon sie keine Ansprüche an genaue Darstellung der Beobachtungen machen kann.

Die Zeit des Lichtwechsels beträgt $9^h\,12^m$; die Periode Π ist $68^h.816$. Die Zeit der Abnahme der Helligkeit ist ungefähr gleich der Zeit der Zunahme:

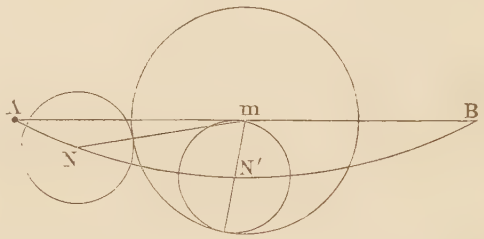
$$t_0 = 4^h.6.$$

τ sei die Zeitdauer des Minimums:

$$\tau = 15^m.$$

Letztere Angabe ist streng genommen nicht richtig, da zur Zeit des Minimums keine Constanz des Lichtes eintritt, indessen ist der Unterschied zu gering, als dass man ihn bei dieser Näherung berücksichtigen müsste.

Die Bahn projiciert sich auf die Algolscheibe als eine Ellipse, in $A\,N\,N'\,B$.



N und N' sind die Lagen des Centrums des Trabanten bei Beginn und am Schluss des Eintrittes, und

$$N\,m = 1 + \varkappa;$$
$$N'm = 1 - \varkappa.$$

Da der Körper sich auf einem Kreise bewegt, ist seine Bewegung eine gleichförmige, die Zeit, die er gebraucht, um von der grössten Elongation nach N und N' zu gelangen:

$$t(AN) = \frac{\Pi}{4} - t_0 - \frac{\tau}{2} \text{ und:}$$

$$t(AN') = \frac{\Pi}{4} - \frac{\tau}{2}.$$

$ALL'B$ sei die wahre Bahn; ferner:

$$AmL = \alpha; \quad LmN = \eta;$$
$$AmL' = \alpha'; \quad L'mN' = \eta'.$$

Die Neigung heisse, wie üblich, i. Dann ist:

$$\alpha = \frac{t(AN)}{\Pi} \cdot 360^0;$$

$$\alpha' = \frac{t(AN')}{\Pi} \cdot 360^0;$$

und aus dem sphärischen Dreieck:

$$1) \quad \sin\eta = \sin i \sin\alpha,$$
$$2) \quad \sin\eta' = \sin i \sin\alpha',$$
$$3) \quad \cos\eta = \frac{1+\varkappa}{\chi},$$
$$4) \quad \cos\eta' = \frac{1-\varkappa}{\chi}.$$

χ ist der Halbmesser der Bahn in Einheiten des Algolradius ausgedrückt.

Wir haben 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten, η, η', i und χ, von welchen aber nur i und χ gesucht sind. Man kann diese direkt durch α und α' ausdrücken; einen etwas eleganteren Weg dürfte man wohl erhalten, wenn man auch η und η' in die Berechnung hineinzieht.

Durch Addition und Subtraction von 3) und 4), 1) und 2) erhalten wir:

$$5) \quad \sin\frac{\eta'+\eta}{2}\cos\frac{\eta'-\eta}{2} = \sin i \sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2},$$

$$6) \quad \cos\frac{\eta'+\eta}{2}\sin\frac{\eta'-\eta}{2} = \sin i \cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2},$$

$$7) \quad \cos\frac{\eta'+\eta}{2}\cos\frac{\eta'-\eta}{2} = \frac{1}{\chi},$$

$$8) \quad \sin\frac{\eta'+\eta}{2}\sin\frac{\eta'-\eta}{2} = \frac{\varkappa}{\chi}.$$

Dividiert man 5) durch 8), 6) durch 7), 8) durch 7), so wird:

$$\sin i \sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}\frac{\chi}{\varkappa} = \operatorname{ctg}\frac{\eta'-\eta}{2},$$

$$\sin i \cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\chi = \operatorname{tg}\frac{\eta'-\eta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\eta'+\eta}{2}\operatorname{tg}\frac{\eta'-\eta}{2} = \varkappa. \quad \text{Folglich:}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\eta'+\eta}{2} = \frac{1}{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\alpha'+\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha'-\alpha}{2} \quad \text{und:}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\eta'-\eta}{2} = \frac{1}{\varkappa}\operatorname{ctg}\frac{\alpha'+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha'-\alpha}{2}.$$

Hieraus berechnet man η und η'; χ und i durch die Gleichungen:

$$\sin i = \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\eta'}{\sin\alpha'};$$

$$\chi = \frac{1+\varkappa}{\cos\eta} = \frac{1-\varkappa}{\cos\eta'}.$$

Diese Formeln auf Algol angewandt, erhalte ich:

$$\alpha = 65^0 17'; \quad \eta = 65^0 6';$$
$$\alpha' = 89^0 21'; \quad \eta' = 86^0 46'.$$

Hieraus folgt:

$$\chi = 4.189; \quad \log\chi = 0.6220.$$
$$i = 86^0 49'.$$

Pickering findet ähnliche Werte mittelst einer ähnlichen Methode.

Wenn a und b die Halbaxen der scheinbaren elliptischen Bahn sind, so ist:

$$(1+\varkappa)^2 = a^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta.$$

Weiter nimmt er an, dass während des Minimums sich die Ränder der beiden Scheiben berühren, also:

$$\frac{b}{a} = \cos i = \frac{1-\varkappa}{\chi}.$$

Hieraus wird χ und i bestimmt. Dass das Resultat nicht sehr genau sein kann, ist klar. Diese Annahme ist aber unnötig, denn es ist auch:

$$(1-\varkappa)^2 = a^2\cos^2\eta' + b^2\sin^2\eta'.$$

Multiplicieren wir die obige Gleichung mit $\sin^2\alpha'$, die zweite mit $\sin^2\alpha$ und subtrahierten, so wird:

$$a^2 = 1 + \varkappa^2 + 2\varkappa\frac{\sin^2\eta' + \sin^2\eta}{\sin^2\eta' - \sin^2\eta}.$$

Setzen wir:

$$\frac{\sin^2\eta}{\sin^2\eta'} = \cos 2\theta, \text{ so wird:}$$

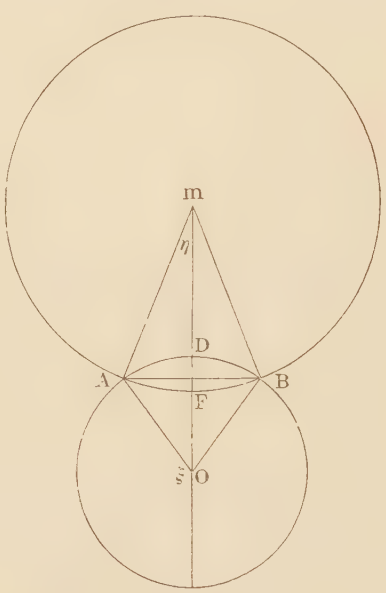
$$a^2 = 1 + \varkappa^2 + 2\varkappa\,\mathrm{ctg}^2\theta = \chi^2.$$

Auf ähnliche Art findet man i.

§ 6.

Die eben angeführte Methode lehrt, nur aus 2 Beobachtungen die Bahn des Trabanten berechnen. Es handelt sich jedoch darum, alle Daten zu einer Bahnbestimmung zu verwerten. Desshalb will ich zunächst die Aufgabe behandeln, aus den als gegeben zu betrachtenden Elementen χ und i die jeweilige Helligkeit zu berechnen.

m sei der Mittelpunkt eines Kreises, der die Algolscheibe darstellt; der kleinere Kreis sei die Scheibe des Begleiters. Die Entfernung der beiden Centra — der Radius Vektor in der scheinbaren Bahn — $m\,O$ heisse ϱ, ferner ist:



$$m\,A = 1; \quad A\,O = \varkappa.$$

$$A\,m\,E = \eta; \quad A\,O\,E = \xi.$$

Die momentane Helligkeit sei J, wo $J = 1$ ist für die volle Leuchtkraft. Dann ist:

$$\frac{A\overline{m^2}\pi - A\,D\,B\,F}{A\,m^2\pi} = J \text{ und:}$$

$$A\,D\,B\,F = \text{Sector}\,A\,m\,B + \text{Sector}\,A\,O\,B - 2\,\text{Dreieck}\,m\,A\,O.$$

Weiter ist:

$$\text{Sector } A\,m\,B = \eta;$$
$$\text{Sector } A\,O\,B = \varkappa^2(\pi - \xi);$$
$$\text{Dreieck } O\,m\,B = \tfrac{1}{2}\varrho \sin\eta.$$

Folglich:

$$J = 1 - \varkappa^2\pi - \frac{1}{\pi}(\eta - \varkappa^2\xi - \varrho\sin\eta).$$

Setzen wir:

$$\pi(1 - J) = M, \text{ so wird:}$$
$$M = \varkappa^2(\pi - \xi) + \eta - \varrho\sin\eta.$$

Der Zusammenhang zwischen ϱ, η und ξ ist gegeben durch die Gleichungen:

$$\cos\eta = \frac{1 + \varrho^2 - \varkappa^2}{2\varrho} \quad \text{und:}$$
$$\sin\eta = \varkappa\sin(\pi - \xi).$$

Diese Betrachtung gilt für den ganzen Verlauf der Bedeckung. Da sich jedoch die Rechnung vereinfacht, wenn wir nur den spitzen Winkel ξ einführen, will ich setzen für den Fall:

$$\xi < \frac{\pi}{2}:$$
$$\varkappa^2\pi - \pi(1 - J) = H.$$

Dann wird:

$$H = \varkappa^2\xi - \eta + \varrho\sin\eta.$$

Die Formeln, die abgeleitet sind, ermöglichen es, eine Ephemeride in folgender Weise zu berechnen. Aus der Bedingung, dass die Bewegung in einer Kreisbahn vor sich geht, erhält man die wahre Anomalie α:

$$\alpha = 360^0\,\frac{t}{\Pi},$$

wobei ich α so bestimme, dass für $\alpha = 90^0$ das Minimum stattfindet, und für $t = o$ der Körper sich im aufsteigenden Knoten befindet.

Bezeichne ich die Projektion der wahren Anomalie in der scheinbaren Bahn mit v, so wird:

$$\operatorname{tg} v = \cos i \operatorname{tg}\alpha \text{ und:}$$

$$\varrho = \chi \frac{\cos \alpha}{\cos v}.$$

Aus ϱ findet man weiter:

$$\cos \eta = \frac{1 + \varrho^2 - \varkappa^2}{2\varrho};$$

$$\sin \xi = \frac{1}{\varkappa} \sin \eta;$$

$$H = \varkappa^2 \xi + \varrho \sin \eta - \eta, \; J = 1 - \varkappa^2 + \frac{H}{\pi};$$

$$M = \varkappa^2 \xi - \varrho \sin \eta + \eta, \; J = 1 - \frac{M}{\pi}.$$

Hierbei ist ξ als spitzer Winkel zu betrachten.

Wird: $\xi = \frac{\pi}{2}$, so ist: $\sin \eta = \varkappa$ und: $\varrho = \sqrt{1 - \varkappa^2}$.

Solange ϱ grösser als $\sqrt{1 - \varkappa^2}$ ist, hat man M, wenn ϱ kleiner, H zu berechnen.

Dieselben Formeln dienen aber auch umgekehrt dazu, aus den gegebenen Helligkeiten J die Elemente i und χ zu berechnen. Hierzu muss ich jedoch eine Umformung vornehmen.

ϱ bestimmt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\cos \eta = \frac{1 - \varkappa^2 + \varrho^2}{2\varrho},$$

die aufgelöst zwei Wurzeln hat:

$$\varrho_1 = \cos \eta + \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta} \text{ und:}$$

$$\varrho_2 = \cos \eta - \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta}.$$

In die Gleichung für M muss also ϱ_1, in die für H ϱ_2 eingetragen werden, sodass ich erhalte:

$$M = \varkappa^2 \arcsin\left[\frac{1}{\varkappa} \sin \eta\right] + \eta - \tfrac{1}{2} \sin 2\eta - \sin \eta \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta};$$

$$H = \varkappa^2 \arcsin\left[\frac{1}{\varkappa} \sin \eta\right] - \eta + \tfrac{1}{2} \sin 2\eta - \sin \eta \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta}.$$

Bei dem jetzigen Gange der Rechnung muss man aus H und M, die man aus J und $\varkappa$ berechnet, η finden. Es ist jedoch practischer, auch die Grösse ξ beizubehalten.

Es ist:

$$\varrho = \frac{\sin(\xi \pm \eta)}{\sin \xi},$$

je nachdem man die Gleichung für M oder H anwendet. Demgemäss wird:

$$M = \varkappa^2 \xi + \iota_i - \varkappa \sin(\xi + \eta);$$
$$H = \varkappa^2 \xi - \eta + \varkappa \sin(\xi - \eta).$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, berechnet man zunächst mit einem angenäherten Wert von η und ξ, M resp. H, und kann diesen dann leicht durch Anwendung der Differentialquotienten $\frac{dH}{d\eta}$ und $\frac{dM}{d\eta}$ verbessern. Es wird:

$$\frac{dH}{d\eta} = 2 \sin^2 \eta \left(\frac{\cos \eta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta}} - 1 \right),$$
$$= 2 \varkappa \operatorname{tg} \xi \sin(\xi - \eta);$$
$$\frac{dM}{d\eta} = 2 \varkappa \operatorname{tg} \xi \sin(\xi + \eta).$$

Hat man durch successive Näherung η und ξ berechnet, so wird:

$$\varrho = \frac{\sin(\xi \pm \eta)}{\sin \xi}.$$

Für χ und i habe ich die Gleichungen:

$$\varrho = \chi \frac{\cos \alpha}{\cos v},$$
$$\operatorname{tg} v = \cos i \operatorname{tg} \alpha \text{ und:}$$
$$\varrho^2 = \chi^2 \cos^2 \alpha + \chi^2 \cos^2 i \sin^2 \alpha.$$

Aus dieser Gleichung, in der ϱ und α bekannt sind, können wir χ^2 und $\chi^2 \cos^2 i$, mithin auch χ und i nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen.

Ehe ich jedoch hierzu übergehe, will ich die gewonnenen Resultate auf Algol anwenden.

Die folgende Tafel diente zur Aufsuchung eines ersten Näherungswertes für η. Sie giebt M und H für η von 10^0 an für je $2^1/_2{}^0$; da in der Nähe des Grenzwertes von η, für $\eta = \arcsin \varkappa$ die Funktionen schnell wachsen, ist das Intervall enger genommen.

$\eta =$	$M =$	$H =$
10°	0.0081	0.0011
12°30′	0.0159	0.0021
15°	0.0275	0.0039
17°30′	0.0434	0.0062
20°	0.0650	0.0096
22°30′	0.0924	0.0140
25°	0.1263	0.0197
27°30′	0.1680	0.0272
30°	0.2181	0.0369
32°30′	0.2773	0.0491
35°	0.3470	0.0650
37°30′	0.4284	0.0852
40°	0.5236	0.1122
42°30′	0.6356	0.1484
45°	0.7704	0.1996
47°30′	0.9442	0.2824
48°30′	1.0370	0.3364
49°	1.0945	0.3743
49°30′	1.1700	0.4300

Die folgende Tafel giebt M, H, η, ξ und ϱ aus den Beobachtungen berechnet.

$t =$	$M =$	$H =$	$\eta =$	$\xi =$	$\varrho =$
— 4.5	0.0179		13°0′	17°7′	1.7048
— 4.0	0.0996		23°5′	30°52′	1.5760
— 3.5	0.2111		29°40′	40°22′	1.4513
— 3.0	0.3610		35°27′	49°22′	1.3123
— 2.5	0.5655		40°59′	59°7′	1.1473
— 2.0	0.8551		46°19′	71°8′	0.9385
— 1.5	1.2428		49°47′	87°42′	0.6773
— 1.0		0.2391	46°22′	71°17′	0.4446
— 0.5		0.0537	33°16′	45°52′	0.3040
0.0		0.0000	0°0′	0°0′	0.2357
0.5		0.0490	32°26′	44°34′	0 2995
1.0		0.1627	43°18′	63°49′	0.3905
1.5		0.3622	48°52′	80°16′	0.5282
2.0	1.1166		49°10′	81°57′	0.7618
2.5	0.7885		45°17′	68°24′	0.9850
3.0	0.5118		39°43′	56°44′	1.1885
3.5	0.2940		33°8′	45°40′	1.3716
4.0	0.0697		20°29′	27°15′	1.6162
4.5	0.0088		10°15′	13°28′	1.7273

Der Grenzwinkel, für den $\sin\eta = \varkappa$ ergiebt sich zu: $49^{0}50'$.

Die Berechnung von χ und i aus den Werten von ϱ und α kann entweder auf direktem Wege oder durch Anwendung von Differentialformeln geschehen, wenn man eine Approximation bereits erlangt hat, was auf folgendem Wege geschieht.

Unserer Annahme, dass der Trabant während des Minimums sich total auf Algol projiciert, wird offenbar dann grade noch Genüge geleistet, wenn die Ränder der beiden Scheiben sich zu der erwähnten Zeit berühren. Für diesen Fall ist:

$$\cos i_0 = \frac{1-\varkappa}{\chi}.$$

Ich erhalte einen Näherungswert, wenn ich dies in die Gleichung:

$$\varrho^2 = \chi^2\cos^2\alpha + \chi^2\cos^2 i\sin^2\alpha$$

eintrage; dies giebt:

$$\chi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (1-\varkappa)^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir für ϱ und $\varkappa$ die Werte ein, so erhalten wir folgende χ:

$t =$	$\chi =$		$\chi =$
— 4.5	4.234	+ 4.5	4.291
— 4.0	4.369	+ 4.0	4.483
— 3.5	4.564	+ 3.5	4.308
— 3.0	4.778	+ 3.0	4.313
— 2.5	4.970	+ 2.5	4.233
— 2.0	5.008	+ 2.0	3.996
— 1.5	4.657	+ 1.5	3.471
— 1.0	4.140	+ 1.0	3.423
— 0.5	4.210	+ 0.5	4.054

Die Summe der Fehlerquadrate ergiebt sich:

$$[\delta\delta] = 3.0629.$$

Mithin der Fehler einer Darstellung:

$$\varepsilon = 0.2863$$

und der mittlere Fehler von χ:

$$\varepsilon_\chi = +0.0993.$$

Aus χ findet man:

$$i = 86^0 52 \text{ und:}$$
$$\chi = 4.306;$$
$$\varepsilon_i = +4'.$$

Ich hatte gefunden:

$$\frac{dM}{d\eta} = 2\sin^2\eta\left(\frac{\cos\eta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\eta}} + 1\right) \text{ und:}$$

$$\frac{dH}{d\eta} = 2\sin^2\eta\left(\frac{\cos\eta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\eta}} - 1\right).$$

Um eine Gleichung zwischen den Incrementen von M resp. H einerseits und χ und i andrerseits herzustellen, differentiiere ich die Gleichungen:

$$\varrho = \cos\eta \mp \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\eta}.$$

Dies giebt:

$$\frac{d\varrho}{d\eta} = -\sin\eta\left(\frac{\cos\eta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\eta}} \mp 1\right).$$

Also auch:

$$\frac{dM}{d\varrho} = -2\sin\eta;$$

$$\frac{dH}{d\varrho} = 2\sin\eta.$$

Ferner ist die Gleichung zu differentiieren:

$$\varrho^2 = \chi^2\cos^2\alpha + \chi^2\cos^2 i\sin^2\alpha.$$

Dies giebt:

$$d\varrho = \frac{\varrho}{\chi}d\chi - \tfrac{1}{2}\frac{\chi^2\sin 2i\sin^2\alpha}{\varrho}di$$

Trägt man dies in die Differentialquotienten von M und H ein, so erhält man:

$$-\left.\begin{matrix} dM \\ dH \end{matrix}\right\} = \frac{2\varrho\sin\eta}{\chi}d\chi - \chi^2 \cdot \frac{\sin 2i\sin^2\alpha\sin\eta}{\varrho}di.$$

Ich habe nach dieser Methode die Rechnung nicht durchgeführt, die Formeln nur desshalb abgeleitet, weil ich sie später gebrauchen werde.

Die andere Methode ergiebt durch Auflösung der Gleichungen für ϱ^2 nach der Methode der kleinsten Quadrate χ^2 und $\chi^2 \cos^2 i$.

Trage ich in diese die Zahlenwerte für ϱ und α ein, so erhalte ich folgende 18 Bedingungsgleichungen, in denen die Coefficienten Logarithmen sind, und die Gleichungen für zum Minimum symmetrisch liegende Beobachtungen untereinander geschrieben sind:

$0.4633 = \chi^2$	$9.2028 + \chi^2 \cos^2 i$	9.9245
0.4747		
0.3951	9.1057	9.9407
0.4170		
0.3235	8.9943	9.9549
0.2745		
0.2361	8.8643	9.9670
0.1500		
0.1193	8.7093	9.9772
9.9868		
9.9448	8.5182	9.9854
9.7637		
9.6616	8.2704	9.9918
9.4455		
9.2959	7.9198	9.9964
9.1832		
8.9656	7.3184	9.9991.
8.9529		

Hieraus ergeben sich folgende Normalgleichungen:

$$0.12188\,\chi^2 + 1.0224\,\chi^2 \cos^2 i = 2.3948.$$
$$1.0224\,\chi^2 + 15.8334\,\chi^2 \cos^2 i = 20.7309.$$

Weiter:

$$\log \chi^2 = 1.27662 \text{ und}$$
$$\log (\chi^2 \cos^2 i) = 8.94554.$$

Dies giebt:

$$\chi = 4.3482;$$
$$i = 86^0 5'.$$

Die Summe der Fehlerquadrate ergiebt sich zu 0.31135, mithin der mittlere Fehler einer Darstellung $\varepsilon = 0.1395$ und die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\varepsilon_{\chi^2} = 0.5901$$

und:

$$\varepsilon_{\chi^2 \cos^2 i} = 0.05179.$$

Die mittleren Fehler ε_χ und ε_i erhält man aus jenen, wenn man sie als Differentiale betrachtet und χ^2 resp. $\chi^2 \cos^2 i$ differentiiert.

Dann wird:

$$d\chi^2 = 2\chi\, d\chi.$$

oder:

$$\varepsilon_{\chi^2} = \frac{1}{2\chi}\, \varepsilon_\chi.$$

$$d(\chi^2 \cos^2 i) = -2\chi^2 \sin i \cos i\, di + 2\chi \cos^2 i\, d\chi$$

$$\varepsilon_i = \operatorname{ctg} i \left(\frac{\varepsilon_{\chi^2}}{2\chi^2} - \frac{\varepsilon_{\chi^2 \cos^2 i}}{\chi^2 \cos^2 i} \right);$$

also:

$$\varepsilon_\chi = +0.0620;$$
$$\varepsilon_i = \pm 1^0 6'.$$

Aus diesen Elementen kann man mittelst der vorher abgeleiteten Formeln eine Ephemeride für die Intensitäten berechnen.

In der folgenden Tafel sind die beobachteten Helligkeiten mit den aus den beiden Elementensystemen abgeleiteten zusammengestellt.

t	I. Ber.	Ber.—Beob.	II. Ber.	Ber.—Beob.
— 4.6	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
— 4.5	0.9979	+ 0.0036	0.9998	+ 0.0055
— 4.0	0.9625	— 0.0058	0.9687	+ 0.0004
— 3.5	0.9062	— 0.0266	0.9145	— 0.0183
— 3.0	0.8361	— 0.0490	0.8459	— 0.0392
— 2.5	0.7565	— 0.0635	0.7676	— 0.0524
— 2.0	0.6704	— 0.0574	0.6830	— 0.0448
— 1.5	0.5819	— 0.0225	0.5935	— 0.0109
— 1.0	0.4979	+ 0.0059	0.5153	+ 0.0233
— 0.5	0.4339	+ 0.0009	0.4534	+ 0.0204
+ 0.5	0.4339	+ 0.0024	0.4534	+ 0.0219
+ 1.0	0.4979	+ 0.0002	0.5153	+ 0.0476
+ 1.5	0.5819	+ 0.0507	0.5935	+ 0.0623
+ 2.0	0.6704	+ 0.0258	0.6830	+ 0.0434
+ 2.5	0.7665	+ 0.0075	0.7676	+ 0.0186
+ 3.0	0.8361	— 0.0010	0.8459	+ 0.0088
+ 3.5	0.9062	— 0.0002	0.9145	+ 0.0081
+ 4.0	0.9625	— 0.0153	0.9687	— 0.0091
+ 4.5	0.9979	+ 0.0007	0.9998	+ 0.0026
+ 4.6	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000

§ 7.

Bei den bisherigen Untersuchungen in § 5—6 hatte ich für den Halbmesser des Algoltrabanten den Wert angenommen, der sich aus der Annahme einer vollständigen Projection zur Zeit des Minimums ergab. Von vorneherein ist dieser Wert nur als eine erste Annäherung anzusehen, wenn gleich sich zeigen wird, dass er von dem wirklichen Wert nur um eine sehr kleine Grösse abweicht.

Ich habe demnach zu untersuchen: wie ändert sich die Helligkeit, wenn sich der Radius des Trabanten und dessen Bahnelemente ändern. Diese Frage lässt sich dadurch beantworten, dass wir eine Gleichung zwischen den Differentialen dJ, $d\varkappa$, $d\chi$ und di herstellen.

Im vorigen Paragraphen hatte ich die Formeln abgeleitet:

$$H = \varkappa^2 \xi - \eta + \varrho \sin \iota ,$$

$$M = \varkappa^2 \xi + \eta - \varrho \sin \eta;$$
$$\varkappa \sin \xi = \sin \eta.$$
$$\varrho = \cos \eta \pm \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \eta},$$
$$\varrho^2 = \chi^2 \cos^2 \alpha + \chi^2 \cos^2 i \sin^2 \alpha.$$

Da χ und i, wie sich aus der letzten Gleichung ergiebt, nur durch ϱ eingeführt werden, betrachte ich $\varkappa$ und ϱ als unabhängige Variable und erhalte durch Differentiation:

$$dH = 2\varkappa\xi d\varkappa + \varkappa^2 d\xi + d\varrho \sin \eta + (\varrho \cos \eta - 1) d\eta.$$

$d\eta$ und $d\xi$ sind durch die Gleichungen gegeben:

$$d\eta = \frac{\varkappa \cos \xi d\varrho + \varrho d\varkappa}{\varrho \sin \eta},$$

$$d\xi = \frac{\cos \eta}{\varrho \sin \eta} d\varrho + \left(\frac{\cos \eta}{\varrho \sin \eta \cos \xi} - \frac{\operatorname{tg} \xi}{\varkappa} \right) d\varkappa.$$

Dies trage ich in die Ausdrücke für dH ein und fasse die Glieder mit $d\varrho$ und $d\varkappa$ zusammen:

$$dH = d\varkappa \left\{ 2\varkappa\xi - \varkappa \operatorname{tg} \xi + \frac{\varkappa}{\varrho \sin \eta} \left(\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} - 1 + \varrho \cos \eta \right) \right\}$$
$$+ d\varrho \left\{ \sin \eta + \frac{\varkappa \cos \xi}{\varrho \sin \eta} \left(\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} - 1 + \varrho \cos \eta \right) \right\}.$$

Weiter wird der Ausdruck:

$$\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} - 1 + \varrho \cos \eta = -1 + \frac{\cos \eta}{\cos \xi} (\varkappa + \varrho \cos \xi) = \sin \eta \cdot \operatorname{tg} \xi \cdot \varrho.$$

Schliesslich wird:

$$dH = 2\varkappa\xi d\varkappa + 2 \sin \eta d\varrho.$$

Nun ist:

$$dH = 2\varkappa\pi d\varkappa + \pi dJ,$$

folglich:

$$dJ = -\frac{2\varkappa(\pi - \xi)}{\pi} d\varkappa + \frac{2 \sin \eta}{\pi} d\varrho.$$

Für dM ergiebt sich eine analoge Formel. Die Differentiation giebt:

$$dM = 2\varkappa\xi d\varkappa + \varkappa^2 d\xi - d\varrho \sin \eta + (1 - \varrho \cos \eta) d\varkappa.$$

Weiter:

$$d\eta = \frac{\varkappa}{\varrho \sin \eta} d\varkappa - \frac{\varkappa \cos \xi}{\varrho \sin \eta} d\varrho,$$

$$d\xi = \left[\frac{\cos \eta}{\varrho \sin \eta \cos \xi} - \frac{\operatorname{tg} \xi}{\varkappa}\right] d\varkappa - \frac{\cos \eta}{\varrho \sin \eta} d\eta.$$

$$dM = \left\{2\varkappa\xi - \operatorname{tg}\xi + \frac{\varkappa}{\varrho \cos \eta}\left(\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} + 1 - \varrho \cos \eta\right)\right\} d\varkappa$$

$$- d\varrho \left\{\sin \eta + \frac{\varkappa \cos \xi}{\varrho \sin \eta}\left(\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} + 1 - \varrho \cos \eta\right)\right\}.$$

Entsprechend dem vorigen wird:

$$\frac{\varkappa \cos \eta}{\cos \xi} + 1 - \varrho \cos \eta = \varrho \sin \eta \operatorname{tg} \xi$$

und:

$$dM = 2\varkappa\xi d\varkappa - 2 \sin \eta d\varrho.$$

Da aber:

$$dM = -\pi dJ,$$

so folgt:

$$dJ = -\frac{2\varkappa\xi}{\pi} d\varkappa + \frac{2 \sin \eta}{\pi} d\varrho.$$

Nehme ich an, dass der Winkel ξ von 0^0 bis 180^0 wachsen kann, so sind die beiden aus H und M abgeleiteten Differentialformeln, wie es ja auch zu erwarten war, identisch.

Im vorigen Paragraphen war die Formel abgeleitet:

$$d\varrho = \frac{\varrho}{\chi} d\chi - \tfrac{1}{2} \frac{\sin 2i \sin^2 \alpha \chi^2}{\varrho} di.$$

Die gesuchte Gleichung zwischen den Differentialen wird also:

$$\frac{\pi dJ}{2} = -\xi d\varkappa + \frac{\varrho \sin \eta}{\chi} d\chi - \frac{\chi^2 \sin 2i \sin^2 \alpha \sin^2 \eta}{2\varrho} di.$$

Betrachte ich die gesuchten Correctionen als Differentiale, so erhalte ich ein System von Bedingungsgleichungen mit 3 Unbekannten, aus welchen ich diese durch die Normalgleichungen finde.

Zu Grunde gelegt ist die im § 6 abgeleitete Ephemeride, welcher die Elemente:

$$\varkappa = 0.7643,$$
$$\chi = 4.3482,$$
$$i = 86^0\ 5'$$

entsprachen. Trägt man für sämtliche Beobachtungen die Werte für dJ, ξ, ϱ, η, χ und i in die obige Gleichung ein, so entsteht folgendes System von Bedingungsgleichungen, die wie in § 6 angeordnet sind:

$$d\varkappa\, 8.6732 + d\chi\, 8.2804_n + di \cdot 8.4634 = 7.7404$$

			7.4150
9.4166	8.9551_n	9.2483	6.6021
			7.9590_n
9.5737	9.0360_n	9.4504	8.2625_n
			7.8976
9.6728	9.0473_n	9.5970	8.5933_n
			7.9445
9.7488	9.0205_n	9.7244	8.7193_n
			8.2695
9.8144	8.9623_n	9.8458	8.6513_n
			8.5843
9.8816	8.8698_n	9.9677	8.0374_n
			8.7945
9.9424	8.7317_n	0.0878	8.3674
			8.6776
0.0149	8.5302_n	0.1726	8.3096
			8.3404

Hierzu kommt noch als Bedingungsgleichung, dass die Helligkeit im Minimum $= 0.4159$ sei. Für diesen Fall ist $\eta = \xi = o$ und der Coefficient von $d\varkappa = 2\varkappa$, wesshalb man bei der Bildung der Quadratsummen $4\varkappa^2$ hinzuzählen muss.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich folgende Normalgleichungen:

$$9.5158\, d\varkappa - 0.74986\, d\chi + 8.8256\, di = 0.10191$$
$$-0.74986\, d\varkappa + 0.12335\, d\chi - 0.79270\, di = -0.000289$$
$$8.8256\, d\varkappa - 0.79270\, d\chi + 11.190\, di = 0.15877,$$

und die Unbekannten:

$$dz = -0.0013,$$
$$d\chi = 0.1607,$$
$$di = 1^0\,32'.$$

Bringt man diese Correctionen an die früheren Werte an, so wird:

$$z_1 = 0.7630,$$
$$\chi_1 = 4.5089,$$
$$i_1 = 87^0\,37'.$$

Der grosse Wert von $d\chi$ und di lässt vermuten, dass diese erste Correction nicht ausreicht; in der That ergeben sich noch für diese Werte Verbesserungen. Mit obigen Daten ist nun eine neue Ephemeride berechnet, welche der folgenden Tabelle zu Grunde liegt.

Mit den neuen Helligkeiten sind dann wieder die Bedingungsgleichungen berechnet.

t	Berechnet	Ber. — Beob.
— 4.5	1.0000	0.0057
— 4.0	0.9790	0.0107
— 3.5	0.9259	— 0.0069
— 3.0	0.8556	— 0.0295
— 2.5	0.7731	— 0.0469
— 2.0	0.6825	— 0.0453
— 1.5	0.5887	— 0.0157
— 1.0	0.4964	0.0044
— 0.5	0.4262	— 0.0068
0.0	0.4178	0.0019
0.5	0.4262	— 0.0053
1.0	0.4964	0.0287
1.5	0.5887	0.0575
2.0	0.6825	0.0379
2.5	0.7731	0.0241
3.0	0.8556	0.0185
3.5	0.9259	0.0195
4.0	0.9790	0.0012
4.5	1.0000	0.0028

dx log 0	$+ d\chi$ log 0	$+ di$ log 0	$=$ 7.7559
			7.4472
9.3557	8.8954_n	8.9978	8.0294
			7.0792
9.5504	9.0116_n	9.2380	7.8388_n
			8.2900
9.6613	9.0317_n	9.3976	8.4698_n
			8.2672
9.7442	9.0066_n	9.5337	8.6712_n
			8.3820
9.8152	8.9450_n	9.6635	8.6561_n
			8.5786
9.8824	8.8404_n	9.7967	8.1959_n
			8.7597
9.9619	8.6649_n	9.9328	7.6435
			8.4579
0.0844	8.2530	9.9442	7.8325_n
			7.7243_n
0.1834	log 0	log 0	7.2788

Hieraus folgen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 10.363\, dx - 0.66890\, d\chi + 6.0392\, di &= 0.03803, \\ -0.66890\, dx + 0.10726\, d\chi - 0.45294\, di &= -0.002286, \\ 6.0392\, dx - 0.45294\, d\chi + 4.6612\, di &= 0.03166; \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} dx &= -0.0020, \\ d\chi &= 0.0098, \\ di &= 36'. \end{aligned}$$

Die definitiven Werte der Elemente werden:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.7610, \\ \chi_2 &= 4.5187, \\ i_2 &= 88^0\ 13'. \end{aligned}$$

Trägt man diese Werte in die Bedingungsgleichungen ein und bringt die Correctionen an die vorher berechneten Helligkeiten, so erhält man dieselben Werte, die man aus den strengen Formeln ableitet. x_2, χ_2 und i_2 sind also die endgiltigen Elemente.

Die Summe der Fehlerquadrate wird $= 0.012046$; mithin der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Sigma(vv)}}{4} = 0.02768$$

und hieraus die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\varepsilon_{d\varkappa} = 0.0177;$$
$$\varepsilon_{d\chi} = 0.1124;$$
$$\varepsilon_{di} = 1^0\,31'.$$

Die wahrscheinlichsten Werte der Kreisbahnelemente sind:

$$\varkappa = 0.7610 \pm 0.0177;$$
$$\chi = 4.5187 \pm 0.1124;$$
$$i = 88^0\,13' \pm 1^0\,31'.$$

Hiermit ist folgende Tabelle berechnet:

t	$\eta =$	$\xi =$	$\varrho =$	Helligk. =	Ber.—Beob.=
— 4.5	0°0′	0°0′	1.810	1.0000	0.0057
— 4.0	19°57′	26°39′	1.620	0.9794	0.0111
— 3.5	30°37′	42°1′	1.427	0.9260	— 0.0068
— 3.0	38°10′	54°18′	1.230	0.8552	— 0.0299
— 2.5	43°57′	65°47′	1.032	0.7722	— 0.0478
— 2.0	48°1′	77°38′	0.8321	0.6805	— 0.0473
— 1.5	49°32′	88°15′	0.6324	0.5828	— 0.0216
— 1.0	45°27′	69°26′	0.4345	0.4903	— 0.0017
— 0.5	14°28′	19°10′	0.2495	0.4220	— 0.0110
0.0	0°0′	0°0′	0.1406	0.4209	0.0050
+ 0.5	14°28′	19°10′	0.2495	0.4220	— 0 0095
+ 1.0	45°27′	69°26′	0.4345	0.4903	0.0226
+ 1.5	49°32′	88°15′	0.6324	0.5828	0.0516
+ 2.0	48°1′	77°38′	0.8321	0.6805	0.0359
+ 2.5	43°57′	65°47′	1.032	0.7722	0.0232
+ 3.0	38°10′	54°18′	1.230	0.8552	0.0181
+ 3.5	30°37′	42°1′	1.427	0.9260	0.0196
+ 4.0	19°57′	26°39′	1.620	0.9794	0.0016
+ 4.5	0°0′	0°0′	1.810	1.0000	0.0028

§ 8.

Den bisherigen Untersuchungen lag die Annahme zu Grunde, dass der Trabant sich in einer Kreisbahn bewegt. Dies ist jedoch nur als eine erste Näherung zu betrachten, zumal da der Lichtwechsel nicht symmetrisch zum Minimum vor sich geht. Man ist also gezwungen, eine elliptische Bahn zu Grunde zu legen, und es handelt sich darum, ihre Elemente zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich sofort auf ein Problem der Theorie der Doppelsternbahnen zurückführen. Nimmt man nämlich $\varkappa$, den Radius des Trabanten als bekannt an, den ich nachher wiederum durch Anwendung der im § 7 abgeleiteten Differentialformel corrigieren werde, so lassen sich aus den beobachteten Helligkeiten die Distanzen in der scheinbaren Bahn herleiten. Aus diesen und den zugehörigen Zeiten muss die Ellipse bestimmt werden.

Die Theorie der Doppelsternbahnen zeigt nun, dass nur der Knoten sich aus diesen Daten nicht bestimmen lässt, was auch mit unserem Falle übereinstimmt. Eine Complication der Aufgabe tritt hier dadurch ein, dass die Neigung sehr nahe an 90^0 liegt.

Fast alle Methoden, aus gewissen Daten die Elemente einer Doppelsternbahn zu finden, setzen die Kenntnis wenigstens einiger Positionswinkel voraus. Da diese wegen der Natur der Aufgabe nicht bekannt sein können, will ich ein Verfahren anwenden, mittelst dessen man aus der Umlaufszeit, die bekannt ist, Distanzen und den zugehörigen Zeiten die Bahnelemente finden kann.

Gegeben seien:

die Distanzen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$;
die Zeiten $t_1, t_2 \ldots t_n$, wo: $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_n - t_{n-1}$.

und die Umlaufszeit T; angenähert $i = 90^0$.

Wie bekannt, ergeben sich der wahre Radius Vektor r und die wahre Anomalie v aus den Gleichungen:

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau);$$

$$E - e\sin E = M;$$

$$r = a(1 - e\cos E);$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E.$$

Es wurden nun, durch eine Reihe von Versuchen, Näherungswerte für e und τ bestimmt und aus diesen die E und v berechnet. Aus den v und den gegebenen Distanzen ϱ wurde dann, wie folgt, die Perihellänge abgeleitet.

Es ist in erster Näherung:

$$\frac{\sin(p_2 - p_1)}{\sin(p_3 - p_2)} = \frac{\varrho_3}{\varrho_1},$$

also bekannt; p ist der Positionswinkel. Zerlegt man die Sinus und setzt:

$$\cos p = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2(v+\lambda)}} \quad \text{und:}$$

$$\sin p = \frac{\cos i \operatorname{tg}(v+\lambda)}{\sqrt{1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2(v+\lambda)}},$$

so erhält man nach weiteren Reductionen eine quadratische Gleichung für tg λ.

Führt man ein:

$$P = \frac{\sin(v_3 - v_2)}{\sin(v_2 - v_1)} \cdot \frac{\cos v_1}{\cos v_3} \cdot \frac{\varrho_3}{\varrho_1}, \qquad P' = \frac{\sin(v_4 - v_3)}{\sin(v_3 - v_2)} \cdot \frac{\cos v_2}{\cos v_4} \cdot \frac{\varrho_4}{\varrho_2},$$

$$h = P^2 - 1, \qquad h' = P'^2 - 1,$$

$$f = P^2 \operatorname{tg}^2 v_1 - \operatorname{tg}^2 v_3, \qquad f' = P'^2 \operatorname{tg}^2 v_2 - \operatorname{tg}^2 v_4,$$

$$g = P^2 \operatorname{tg} v_1 - \operatorname{tg} v_3, \qquad g' = P'^2 \operatorname{tg}^2 v_2 - \operatorname{tg}^2 v_4,$$

so wird:

$$\operatorname{tg}^2\lambda - 2\operatorname{tg}\lambda \frac{g\sin^2 i}{f + h\cos^2 i} + \frac{h + f\cos^2 i}{f + h\cos^2 i} = o.$$

$$\operatorname{tg}^2\lambda - 2\operatorname{tg}\lambda \frac{g'\sin^2 i}{f' + h'\cos^2 i} + \frac{h' + f'\cos^2 i}{f' + h'\cos^2 i} = o.$$

Aus diesen Gleichungen bestimmt man dann λ.

Die Theorie der Doppelsternbahnen zeigt, dass, so lange die Bewegungsrichtung des Begleiters nicht spectroscopisch untersucht ist, die Perihellänge bis auf 180^0 unbestimmt ist. Da aber tg λ für die beiden Fälle denselben Wert beibehält, so muss die quadratische Gleichung für

die richtigen Elemente zwei gleiche Wurzeln haben. Das Kriterium dafür, dass eine quadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat:

$$x^2 - 2ax + b = o,$$

ist:

$$a^2 = b.$$

In dem vorliegenden Falle wird demnach:

$$\left(\frac{g \sin^2 i}{f + h \cos^2 i}\right)^2 = \frac{h + f \cos^2 i}{f + h \cos^2 i}.$$

oder:

$$g^2 \sin^4 i = hf(1 + \cos^4 i) + (f^2 + h^2) \cos^2 i.$$

Für:

$$i = 90^0$$

wird:

$$g^2 = hf.$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung hat jedoch das unbequeme, dass bei der Berechnung von $\lambda\ i$ als bekannt voraussetzen muss. Desshalb schlägt man besser folgenden strengen Weg ein.

Es ist:

$$\varrho = a(1 - e \cos E) \cdot \frac{\cos(v + \lambda)}{\cos p}.$$

Setze ich für p seinen Wert ein, so wird:

$$\varrho^2 = a^2(1 - e \cos E)^2 \{\cos^2(v + \lambda) + \cos^2 i \sin^2(v + \lambda)\}.$$

Nun bilde man den Ausdruck:

$$A_{1,2} = \left\{\frac{\varrho_1^2}{(1 - e \cos E_1)^2} - \frac{\varrho_2^2}{(1 - e \cos E_2)^2}\right\} : \sin(v_2 - v_2),$$

$$A_{2,3} = \left\{\frac{\varrho_2^2}{(1 - e \cos E_2)^2} - \frac{\varrho_3^2}{(1 - e \cos E_3)^2}\right\} : \sin(v_3 - v_2),$$

$$A_{3,4} = \left\{\frac{\varrho_3^2}{(1 - e \cos E_3)^2} - \frac{\varrho_4^2}{(1 - e \cos E_4)^2}\right\} : \sin(v_4 - v_3).$$

Die A sind sämmtlich bekannt und sind:

$$A_{1,2} = a^2 \sin^2 i \sin(v_1 + v_2 + 2\lambda),$$

$$A_{2,3} = a^2 \sin^2 i \sin(v_2 + v_3 + 2\lambda),$$
$$A_{3,4} = a^2 \sin^2 i \sin(v_3 + v_3 + 2\lambda).$$

Nach einigen Reductionen erhält man:

$$\operatorname{tg}\left(2\lambda + v_2 + \frac{v_1 + v_3}{2}\right) = \frac{A_{2,3} + A_{1,2}}{A_{2,3} - A_{1,2}} \operatorname{tg} \frac{v_3 - v_1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(2\lambda + v_3 + \frac{v_2 + v_4}{2}\right) = \frac{A_{3,4} + A_{2,3}}{A_{3,4} - A_{2,3}} \operatorname{tg} \frac{v_4 - v_2}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(2\lambda + \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2}\right) = \frac{A_{3,4} + A_{1,2}}{A_{3,4} - A_{1,2}} \operatorname{tg} \frac{v_4 + v_3 - v_2 - v_1}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man λ. In Bezug auf den Quadranten ist noch zu bemerken, dass $A_{1,2}$ dasselbe Vorzeichen wie $\sin(2\lambda + v_1 + v_2)$ hat u. s. w.

Mit den Werten von λ und i berechnet man dann die Positionswinkel p aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} p = \cos i \operatorname{tg}(v + \lambda)$$

und hieraus die halbe grosse Axe:

$$a = \frac{\varrho_1 \cos p_1}{\cos(v_1 + \lambda)(1 - e\cos E_1)};$$

$$a = \frac{\varrho_2 \cos p_2}{\cos(v_2 + \lambda)(1 - e\cos E_2)} \cdots\cdots$$

Mit diesen Elementen, die aus 4 Beobachtungen gewonnen sind, stellt man sämmtliche Distanzen dar und verbessert sie dann mittelst der Differentialformel für $d\varrho$.

Ich habe nun die eben auseinandergesetzte Methode zur Ermittlung der elliptischen Bahn des Algolbegleiters angewandt.

Es ist:

$$n = \frac{2\pi}{T} = 5^0\,14'.$$

Eine erste Hypothese war:

$$e = 0.1913 \text{ und } \tau = 49^h53.$$

Mit diesen Elementen wurde für die Zeiten:

$$t = +3.0,\ +3.5,\ +4.0,\ +4.5$$

die excentrischen und die wahren Anomalieen berechnet:

$$E = 263^0\,57'\ \ 266^0\,31'\ \ 269^0\,6'\ \ 271^0\,43',$$
$$v = 253^0\,6'\ \ \ 255^0\,34'\ \ 258^0\,6'\ \ 260^0\,38'.$$

Die Perihellänge λ ergab sich:

$$\lambda = 30^0\,8'.$$

Die Positionswinkel wurden:

$$p = 343^0\,48',\ 346^0\,20',\ 348^0\,17',\ 349^0\,47'$$

und die 4 Werte für die halbe Axe:

$$a = 4.884,\ 4.871,\ 5.042,\ 4.822.$$

Der Mittelwert ist demnach:

$$a = 4.905.$$

Mit diesen Elementen wurde eine Ephemeride berechnet, die in der folgenden Tafel enthalten ist:

t	$E =$	$p =$	$\varrho =$
— 4.5	227°29′	190°37′	1.930
— 4.0	229°49′	191°52′	1.740
— 3.5	232°8′	193°26′	1.550
— 3.0	234°30′	195°28′	1.355
— 2.5	236°51′	198°6′	1.165
— 2.0	239°13′	201°47′	0.9772
— 1.5	241°37′	207°13′	0.7923
— 1.0	244°1′	216°1′	0.6144
— 0.5	246°26′	231°0′	0.4635
0.5	251°20′	288°49′	0.3755
1.0	253°49′	312°39′	0.4788
1.5	256°18′	326°50′	0.6365
2.0	258°48′	335°0′	0.8136
2.5	261°20′	340°11′	0.9988
3.0	263°57′	343°48′	1.193
3.5	266°31′	346°20′	1.382
4.0	269°6′	348°17′	1.572
4.5	271°43′	349°47′	1.757

An a habe ich jetzt dadurch eine Correction angebracht, dass ich in die Gleichung:

$$a = \frac{\varrho \cos p}{\cos(v+\lambda)(1-e\cos E)}$$

die beobachteten ϱ einsetzte und für jede Zeit ein a erhielt. Das Mittel dieser Werte war:

$$a = 4.424.$$

Hieraus berechnete ich dann die neuen ϱ, ξ, η und die Helligkeiten, wie sie die folgende Tafel angiebt:

$t =$	log ϱ	$J =$	Ber.—Beob.
— 4.5	0.2408	0.9985	0.0042
— 4.0	0.1958	0.9668	— 0.0015
— 3.5	0.1456	0.9155	— 0.0173
— 3.0	0.0871	0.8505	— 0.0346
— 2.5	0.0217	0.7788	— 0.0412
— 2.0	9.9452	0.7013	— 0.0265
— 1.5	9.8541	0.6216	0.0172
— 1.0	9.7437	0.5449	0.0529
— 0.5	9.6212	0.4796	0.0466
0.5	9.5298	0.4492	0.0177
1.0	9.6353	0.4861	0.0184
1.5	9.7590	0.5536	0.0224
2.0	9.8656	0.6310	— 0.0076
2.5	9.9547	0.7105	— 0.0385
3.0	0.0318	0.7898	— 0.0473
3.5	0.0956	0.8474	— 0.0590
4.0	0.1516	0.9221	— 0.0557
4.5	0.1999	0.9706	— 0.0266

Aus diesen Abweichungen kann man nun mittelst einer Differentialformel für $d\varrho$ die Correctionen herleiten, die an die Elemente anzubringen sind.

Setzt man:

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 i}{\cos i}\sin 2(p-\Omega),$$

so wird:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} - m\,d\lambda - \operatorname{tg} i \sin^2(p-\Omega)\,di$$
$$+\left(\frac{a}{r}\right)^2 (e\sin E - m\cos\varphi)\left((t-\tau)\,dn - n\,d\tau\right)$$
$$+\left(\frac{a}{r}\right)^2\left\{\cos\varphi(\cos E - e) + m\sin E\cdot\left(\frac{r}{a}+\cos^2\varphi\right)\right\}d\varphi,$$

wo: $$e = \sin\varphi.$$

Im vorliegenden Fall ist:

$$\Omega = o \text{ und } dn = o.$$

Ich habe nun nicht diese Ausgleichung für ein constantes $\varkappa$ durchgeführt, sondern gleich die Variabilität dieser Grösse berücksichtigt.

Es war:

$$dJ = -\frac{2\varkappa\xi}{\pi}\,d\varkappa + \frac{2\sin\eta}{\pi}\,d\varrho,$$

folglich resultiert die Gleichung:

$$*)\ \frac{\pi\,dJ}{2\varrho\sin\eta} = \frac{da}{a} - m\,d\lambda - \operatorname{tg} i\sin^2 p\,di$$
$$+\left(\frac{1}{1-e\cos E}\right)^2 (e\sin E - m\cos\varphi)\,n\,d\tau$$
$$-\left(\frac{1}{1-e\cos E}\right)^2\left\{\cos\varphi(\cos E - e) + m\sin E\right.$$
$$\left.\cdot(1 - e\cos E + \cos^2\varphi)\right\}d\varphi - \frac{\xi}{\varrho\sin\xi}\,d\varkappa.$$

Anm. Herr Plassmann behauptet in seiner öfters citierten Schrift pag. 29 und 30, dass man für jedes $\varkappa$ ein Elementensystem aufstellen könne, das die Beobachtungen ebensogut darstellt. Dies ist nicht richtig; wie die Differentialformel zeigt, kann die Summe der Fehlerquadrate nur einmal ein Minimum und nur für das aus der Gleichung für $dJ*$ resultierende Elementensystem werden.

Trägt man hierin die Zahlenwerte ein, so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{da}{a} + d\lambda\, 0.4214_n + n\,d\tau\, 0.3308_n + di\, 9.6953_n + d\varphi\, 0.5865 + d\varkappa\, 9.7623_n = 8.3834_n$$

0.4672_n	0.3794_n	9.7907_n	0.6389	9.8260_n	8.5769
0.5176_n	0.4329_n	9.8967_n	0.6960	9.8979_n	8.5637
0.5735_n	0.4920_n	0.0165_n	0.7588	9.9812_n	8.8527
0.6338_n	0.5555_n	0.1491_n	0.8259	0.0746_n	8.9502
0.7008_n	0.6258_n	0.3035_n	0.9003	0.1849_n	8.8070
0.7728_n	0.7014_n	0.4849_n	0.9800	0.3192_n	8.6959_n
0.8408_n	0.7737_n	0.7033_n	1.1564	0.4939_n	9.2963_n
0.8529_n	0.7915_n	0.9455_n	1.0792	0.7037_n	9.3934_n
0.6485	0.5702	1.1167_n	0.8531_n	0.9006_n	9.1208_n
0.8610	0.7966	0.8263_n	1.0885_n	0.6774_n	8.9704_n
0.8243	0.7653	0.6407_n	1.0621_n	0.4655_n	8.9062_n
0.7467	0.6917	0.4165_n	0.9925_n	0.3018_n	8.3307
0.6672	0.6161	0.2257_n	0.9207_n	0.1712_n	8.9623
0.5915	0.5439	0.0557_n	0.8523_n	0.0599_n	9.0056
0.5245	0 4805	9.9113_n	0.7928_n	9.9690_n	9.0840
0.4620	0.4211	9.7799_n	0.7372_n	9.8891_n	9.0765
0.4055	0.3678	9.6623_n	0.6880_n	9.8202_n	8.8376

und die Normalgleichungen:

$$18.00\,\frac{da}{a} - 0.613\,d\lambda + 1.021\,n\,d\tau - 54.747\,di - 3.297\,d\varphi - 38.607\,d\varkappa = 0.0025$$

− 0.613	+429.19	+369.60	+ 8.81	− 739.07	− 26.64	−2.3700
1.021	+369.60	+318.23	− 23.57	− 637.65	− 23.81	−2.1387
−54.747	+ 8.81	− 23.57	+368.38	+ 36.92	+233.04	−5.142
− 3.297	−739.07	−637.65	+ 36.92	+1283.2	− 42.23	+4.928
−38.607	− 26.64	− 23.81	+233.04	− 42.23	+149.57	−2.8426

Hieraus folgen die Werte der 6 Unbekannten:

$$\frac{da}{a} = \quad 0.01191$$
$$d\lambda = \quad 0.0898$$
$$n\,d\tau = -0.1452$$
$$di = -0.0014$$
$$d\varphi = -0.0238$$
$$d\varkappa = \quad 0.0044.$$

Hiermit wurden die dJ berechnet, und die neuen Helligkeiten, sowohl aus den dJ, als auch nach der strengen Formel; beide stimmten überein. In der folgenden Tabelle sind die definitiven Distanzen und Helligkeiten enthalten.

$t =$	$\log \varrho =$	$J =$	Ber.—Beob.
— 4.5	0.2394	0.9968	+ 0.0025
— 4.0	0.1938	0.9642	— 0.0041
— 3.5	0.1428	0.9131	— 0.0197
— 3.0	0.0811	0.8647	— 0.0204
— 2.5	0.0179	0.7993	0.0207
— 2.0	9.9398	0.7249	— 0.0029
— 1.5	9.8482	0.6118	+ 0.0074
— 1.0	9.7392	0.5129	+ 0.0209
— 0.5	9.6203	0.4460	+ 0.0130
0.0	9.5332	0.4318	+ 0.0159
0.5	9.5555	0.4442	+ 0.0127
1.0	9.6621	0.4953	— 0.0025
1.5	9.7792	0.5589	— 0.0206
2.0	9.8811	0.6421	— 0.0177
2.5	9.9681	0.7284	— 0.0178
3.0	0.0426	0.8194	— 0.0159
3.5	0.1058	0.8886	— 0.0037
4.0	0.1606	0.9619	+ 0.0276
4.5	0.2091	0.9935	+ 0.0277

Die Summe der Fehlerquadrate wird:

$$\sum(vv) = 0.005195$$

und der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\varepsilon = 0.01991.$$

Ich erhalte also schliesslich folgende Elemente, aus denen sich die Beobachtungen in sehr befriedigender Weise darstellen lassen:

$$a = 4.477;$$
$$e = 0.1679;\ \varphi = 9^0\,40';$$
$$i = 86^0\,0';$$

$$\lambda = 35^{0}\,16';$$
$$\tau = 47^{h}.938;$$
$$T = 68^{h}.816;\ n^{0} = 5^{0}.232;$$
$$\Omega = 0^{0}\,0'\ \text{(unbestimmt)};$$
$$\varkappa = 0.7687.$$

Der mittlere Fehler einer Helligkeit beträgt 2 Procent.

§ 9.

Ich will nun zum Schluss aus den erlangten Resultaten einige Folgerungen über die Dimensionen und Gestalt des Algolsystems ziehen. Man kann hierbei von verschiedenen Annahmen ausgehen; ich werde nur zwei berücksichtigen.

Zuerst will ich annehmen, dass die Helligkeit des Algol gleich der der Sonne sei. Für diesen Fall hat, wie erwähnt, Pickering den Algolradius zu $0''.00304$ gefunden und:

$$\chi'' = 0''.0138;$$
$$i = 87^{0}\,6'.$$

Der Einfachheit halber nehme ich eine Kreisbahn für den Begleiter an, so dass:

$$\chi = 4.3482 \text{ und:}$$
$$\chi'' = 0''.0137,$$

welche Werte gut übereinstimmen.

Nimmt man nach Gyldén die durchschnittliche Parallaxe der Sterne zweiter Grösse an:

$$p'' = 0''.058,$$

so ist:

$$\operatorname{tg}\chi'' = \frac{A}{\triangle} \text{ und: } \operatorname{tg}p'' = \frac{1}{\triangle},$$

wo χ'' der Radius der Bahn, in Secunden, A in planetarischen Einheiten ausgedrückt, $\triangle$ die Entfernung der Erde vom Algol ist.

Hieraus folgt:

$$A = \frac{\chi''}{p''} = 0.237.$$

Die Entfernung Algol-Trabant ist also ungefähr nur $^3/_5$ der Distanz Sonne—Mercur.

Für das Massenverhältnis der beiden Körper werde ich eine untere Grenze erhalten, wenn ich beiden Körpern eine gleiche Dichte zuschreibe, obschon der Trabant, der als absolut dunkel angenommen werden musste, eine grössere Dichte als der Hauptstern besitzen wird. Es ist also:

$$\frac{m'}{m} = \varkappa^3 = 0.4408.$$

Hieraus folgt der Abstand des Algol vom gemeinsamen Schwerpunct:

$$\overline{AS}'' = \frac{\chi'' \frac{m'}{m}}{1 + \frac{m'}{m}} = 0''.0042.$$

Die grösste Verschiebung, die Algol demnach erhalten könnte, wäre $0''.0084$, eine Grösse, die sich jeder Wahrnehmung entzieht, sodass eine Bestätigung der Trabantentheorie durch Untersuchung der Veränderung der Algolcoordinaten unmöglich ist.

Ferner erhalte ich die Geschwindigkeit des Algol in seiner Bahn pro Secunde:

$$v = \frac{2A \frac{m'}{m} \odot \mathrm{♁} \cdot \pi}{\left(1 + \frac{m'}{m}\right) \Pi^{\mathrm{sec}}}.$$

Nimmt man $\odot\,\mathrm{♁}$ zu 149000000 Km und Π^{sec} zu 247740 an, so wird:

$$v = 274 \text{ Km},$$

und die Geschwindigkeit des Trabanten:

$$v' = 621 \text{ Km}.$$

Pickering findet für die Geschwindigkeit des Algol 160 Km; der Unterschied der beiden Werte rührt von der zu grossen Parallaxe her, die er für die Sterne zweiter Grösse im Durchschnitt annimmt, nämlich $0''.1$.

Eine so enorme Geschwindigkeit muss sich aber mittelst des Spectroscopes nachweisen lassen. Bekanntlich erscheint eine Linie im Spectrum eines Sternes entweder nach der roten oder violetten Seite hin verschoben, je nachdem sich der Stern der Erde nähert oder von ihr wegbewegt.

Ist v seine Geschwindigkeit, c die des Lichtes, λ die Wellenlänge einer Spectrallinie, so ist die Verschiebung:

$$\Delta \lambda = \lambda \cdot \frac{c}{v}.$$

In vorliegendem Falle würde also die Verschiebung der Natriumlinie betragen:

$$\Delta \lambda_D = \pm 0.54.10^{-6} \text{ mm},$$

rund die Entfernung der beiden D Linien, eine Grösse, die sehr gut zu beobachten wäre.

Ist nun keine Verschiebung im Spectrum wahrnehmbar, so lässt sich dies durch folgende Gründe erklären:

1. Die Trabantentheorie ist falsch.
2. Die Parallaxe p'' ist zu klein; dann müsste es also möglich sein, eine Parallaxe bei β Persei nachzuweisen.
3. Das Verhältnis der Massen ist zu gross.
4. Der Radius des Algol in Secunden ist zu gross.

Alles dies findet man leicht aus der Gleichung:

$$v = \frac{2 R'' \chi \cdot \pi \frac{m'}{m} \odot \overset{+}{\circlearrowleft}}{p'' \left(1 + \frac{m'}{m}\right) \Pi^{\text{sec}}}$$

Nenne ich die Umlaufszeit des Algoltrabanten in Jahren ausgedrückt U und M die Summe der Massen beider Körper, so ist nach dem dritten Keppler'schen Gesetz:

$$U^2 M = A^3; \text{ folglich:}$$
$$M = 216 \text{ Sonnenmassen.}$$

Die Massen der einzelnen Körper sind:

$$m = 150 \odot,$$
$$m' = 66 \odot.$$

Hieraus ergiebt sich die Dichte des Algol; ist R sein Halbmesser in Kilometern ausgedrückt, so wird:

$$R = \frac{R''}{p''} \cdot \odot \overset{+}{\circlearrowleft}.$$

Das Volumen des Algol ergiebt sich hieraus als das 142 fache der Sonne, sodass die Dichtigkeiten beider Körper ungefähr gleich sind (gleich 1,4 auf das Wasser bezogen).

Eine andre Annahme ist die, dass Algol und Sonne gleiche Massen haben. Dann wird:

$$A = U^{\frac{2}{3}}(1+z^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 0.04464.$$

Hieraus folgen:

$$\chi'' = 0''.002589$$
$$R'' = 0''.0005954$$
$$R = 0.01027.$$

Die Geschwindigkeiten werden:

$$v = 16\,\text{Km}\,\text{und:}$$
$$v' = 37\,\text{Km}.$$

Da das Volumen 9.861 mal grösser als das der Sonne sich ergiebt, ist die Dichtigkeit des Algol ungefähr $^1/_{10}$ der der Sonne, was nicht gut mit der Annahme übereinstimmt, dass der Algoltrabant dunkel ist.

Fasse ich die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung kurz zusammen, so findet sich folgendes. Nach der Trabantentheorie bewegen sich zwei Körper in dem $4^1/_2$ fachen Abstande des Radius des grösseren um einander, in einer Ebene, die fast genau durch das Sonnensystem geht. Nun ist aber ein System, dessen Componenten in so geringer Entfernung sich befinden, höchst unwahrscheinlich, da es auf keinen Fall den Bedingungen der Stabilität mehr genügen kann. Allerdings ist auch die Voraussetzung, dass die Körper keine wechselseitigen Deformationen durch ihre wechselseitige Anziehung erleiden, sicher nicht erfüllt; indessen würde die Berücksichtigung dieses Umstandes an der Lage nicht viel ändern. Erwägt man aber ferner, dass während des Ueberganges vom Minimum zum Maximum eine Einknickung in der Lichtcurve thatsächlich nachgewiesen ist, die eine Trabantentheorie niemals wird erklären können, so kommt man zu dem Schluss, dass diese, wenigstens für Algol, zu verwerfen ist.

Neuerdings haben Klinkerfues und Plassmann eine Erklärung für den Lichtwechsel gegeben. Sie nehmen an, dass der Trabant wegen seiner Nähe in der Photosphäre des Hauptsternes Ebbe und Flut erzeugt, und dass letztere ein Maximum der Helligkeit hervorbringt. Da dies aber a priori gar nicht einzusehen ist, vielmehr die Flut ebensosehr ein Minimum erzeugen kann, und überhaupt diese Hypothese nur eine sehr complicierte Combination der Trabanten- und der Fleckentheorie ist, ist es unter den gegenwärtigen Umständen geboten, dem Lichtwechsel des Algol die Zöllner'sche Theorie zu Grunde zu legen. Allerdings wird man, wie ich gezeigt habe, nicht durch eine einfache Fleckenverteilung die Schwankungen des Lichtes erklären können; auch hat diese Theorie die eine bisweilen sehr bedenkliche Annahme, dass die Flecken ihre Lage gegen den Stern nicht ändern, sondern constant bleiben. Immerhin ist es aber stets möglich, wie Herr Bruns nachgewiesen hat, durch geeignete Fleckenconfigurationen die Beobachtungen darzustellen.

Ueberhaupt glaube ich, dass man gut thut, vorläufig allen Erscheinungen von veränderlichen Sternen die Zöllner'sche Theorie, als die bestbegründetste, zu supponieren. Wenn irgendwo, so gelten hier die Worte Newton's, die Zöllner dem vierten Teile seiner „photometrischen Untersuchungen": „Ueber die physische Beschaffenheit der Himmelskörper" voraussetzt:

„Effectuum naturalium ejusdem generis eaedem assignandae sunt causae quatenus fieri potest."